ISSN 0130-2221

Квант

Научно-популярный
физико-математический журнал

1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12

$3x^2 + 16xy + 5y^2 = (3x + y)(x + 5y)$

1992

Квант

8 1992

Выходит с января 1970 года

Ежемесячный научно-популярный физико-математический журнал

Учредители — Президиум Российской академии наук, Президиум Академии педагогических наук и коллектив редакции журнала «Квант»

Москва, «Наука», Главная редакция физико-математической литературы

В номере:

Наша обложка

1 *Именно так Евклид доказывал бы справедливость равенства, написанного под рисунком. Смотрите! И убедитесь, что формула верна.*

2 *Прочитав нашу «Шахматную страничку», вы поймете, почему мы выбрали этот «Натюрморт с шахматной доской» Ю. Васнецова. Доска, конечно, нужна для того, чтобы расставить фигуры. А полка? Чтобы черные не увиливали от обратного мата!*

3 *Шахматная страничка.*

4 *«Заколдованная петля» — топологическая головоломка.*

НЕЙТРОН И ЯДЕРНАЯ ЭНЕРГИЯ

(знаменательные даты)

Профессор
А. КИКОИН

В 1896 году было открыто явление радиоактивности, а в следующие несколько лет усилиями многих исследователей были выяснены все характерные его особенности. Для химиков полной неожиданностью был тот факт, что радиоактивные элементы способны превращаться один в другой: уран сам собой превращается в торий, торий в радий, радий в радон и т. д. Оказалась несостоятельной давняя уверенность в том, что атомы ни при каких условиях не могут превращаться один в другой, делиться. Физиков же поразило испускание атомами радиоактивных элементов огромной энергии в виде быстрых положительно и отрицательно заряженных частиц и квантов электромагнитного излучения. То, что атомы могут испускать энергию, было известно и раньше: так, энергия выделяется атомами при излучении света, при химических реакциях. Но ни одна, ни другая энергия не превышает нескольких электронвольт*) в расчете на каждый атом. Радиоактивные же превращения сопровождаются выделением энергии порядка миллионов электронвольт на атом.

Кладовая или... кладбище? Грандиозная кинетическая энергия вылетающих из атома частиц не может появиться иначе, как за счет столь же огромной потенциальной энергии внутри атома. А она свидетельствует о чудовищных взаимодействиях внутри атома. Понятно, что не мог не возникнуть вопрос о возможности их практического использования.

Та энергия, которая в природе выделяется атомами радиоактивных элементов, большого практического интереса не представляет. Испускается она редкими, можно сказать, экзотическими элементами в малых количествах, и притом она совершенно неуправляема. Светящиеся стрелки приборов да некоторые применения в медицине — вот и все, что удалось использовать на практике. Но если вновь открытая энергия содержится в атомах радиоактивных элементов, то, наверное, она должна существовать и в атомах других элементов. И нужно только суметь ее оттуда извлечь или, как тогда говорилось, освободить. Можно ли это сделать?

Здесь мнения разделились. Одни считали, что атом (всякий атом, а не только радиоактивный!) — склад энергии, из которого ее можно извлечь, раз это «умеет» делать природа с радиоактивными атомами. Другие утверждали, что атомы — это кладбище энергии, в котором она надежно захоронена, и освободить ее оттуда никогда не удастся. Так думало большинство специалистов.

Надо иметь в виду, что тогда, в самом начале века, никто не знал, как устроены атомы. Известно было лишь, что в атомах содержатся отрицательно заряженные частицы — электроны и положительный заряд — неизвестно в каком виде. Об «архитектуре» атома лишь строились догадки. Но ясно, что, не зная строения и состава атома, нельзя решить спор о внутриатомной энергии. И проблема

*) Напомним, что в электронвольтах (эВ) принято измерять энергию микрочастиц, имеющих электрический заряд; 1 эВ$=1{,}6\cdot10^{-19}$ Дж. (*Прим. ред.*)

строения атома надолго становится главной проблемой физики.

В решении этой проблемы приняли участие самые блестящие физики века. Причем они не были озабочены выяснением того, кто прав в споре, о котором мы здесь говорили. Они искали ответ на вопрос, как устроен атом и какие процессы в нем происходят или могут происходить. Но мы, знающие теперь, чем все это кончилось, можем принять, что целью исследований были и поиски способа получения и использования той энергии, которая таится в недрах атома. Вспомнив известные строки А. С. Пушкина, мы можем сказать, что вся физика «была залогом свиданья верного с» ... тем, что мы теперь называем атомной энергией. О том, как, шаг за шагом, физика пришла к этому «свиданью верному», и будет кратко рассказано дальше.

Шаг за шагом. В 1911—1912 годах, через 15 лет после открытия явления радиоактивности (и кстати, с помощью этого явления) усилиями экспериментатора Э. Резерфорда и теоретика Н. Бора был решен вопрос об устройстве атома. Появилась так называемая планетарная модель атома, согласно которой атом состоит из положительно заряженного ядра и окружающей его электронной оболочки. Стало также ясно, что химические процессы, при которых выделяется энергия порядка одного или нескольких электронвольт, разыгрываются в электронной оболочке, а поразившая физиков энергия в миллионы электронвольт рождается в недрах атомного ядра. Именно ее теперь чаще всего и называют атомной энергией, хотя следовало бы ее называть ядерной энергией.

В 1919 году, год спустя после первой мировой войны, Э. Резерфорд выполнил замечательную работу по бомбардировке (именно тогда появился этот военный термин в физике) атомов азота альфа-частицами, испускаемыми радиоактивным полонием ($^{214}_{84}Po$). При этом из ядер азота вылетали быстрые частицы, оказавшиеся ядрами водорода. Эту ядерную реакцию можно записать так:

$$^{14}_{7}N + ^{4}_{2}He \rightarrow ^{17}_{8}O + ^{1}_{1}H.$$

Похожие реакции наблюдались и при бомбардировке альфа-частицами других элементов — бора, фтора, хлора, алюминия и т. д. (всего 13 элементов). Во всех случаях бомбардируемые элементы испускали ядра водорода.

Эрнест Резерфорд (1871—1937).

Об опытах Резерфорда говорили и писали, что их главным результатом было открытие одной из составных частей ядра любого элемента — ядра атома водорода, уже в 1920 году названного Резерфордом протоном. И это, конечно, верно. Об этих опытах говорили и писали также, что в них впервые наблюдалось искусственное превращение одних элементов в другие (азот превращался в кислород, алюминий — в кремний и т. д.). Это, разумеется, тоже верно. Но для нас важно то, что в опытах Резерфорда было показано, что́ именно надо сделать, чтобы извлечь из атомов (точнее — из их ядер) энергию. Для этого, оказывается, нужно ввести в ядро дополнительные частицы (или частицу). На такое «вторжение» ядро реагирует очень бурно — оно испускает быструю частицу (иногда не одну). Кинетическая энергия испускаемой частицы — это и есть «освобожденная» ядерная энергия.

Нильс Бор (1885—1962).

Так, на вторжение альфа-частицы в ядро азота оно ответило испусканием протона. Правда, для того чтобы альфа-частица могла попасть в ядро, она должна обладать достаточной для этого энергией — ведь она отталкивается от ядра. И если мы интересуемся практическим использованием ядерной энергии, то нужно сравнить затраченную энергию — энергию альфа-частицы — с полученной — с энергией протона. В случае с азотом сравнение это показывает, что выигрыша энергии нет — потраченная энергия больше полученной. Но в упомянутой уже выше реакции с алюминием —

$$^{27}_{13}\mathrm{Al}+{}^{4}_{2}\mathrm{He}\rightarrow{}^{30}_{14}\mathrm{Si}+{}^{1}_{1}\mathrm{H}$$

картина совсем другая. Здесь энергия вылетевшего протона на 3 МэВ больше энергии альфа-частицы. Это означает, что каждый атом алюминия дает энергию почти в миллион раз большую, чем атом углерода, участвующий в реакции горения. Казалось бы, задача решена. Надо проектировать и строить установки, в которых роль топлива будет играть алюминий, и перестать сжигать уголь, нефть, газ. Тем более, что алюминия на земле в сотни раз больше, чем углерода. Но никто не спешил создавать такие установки. Дело в том, что положительно заряженные альфа-частицы, у которых положительный заряд равен удвоенному заряду электрона, сильно отталкиваются от ядер, и далеко не всякая альфа-частица проникает в ядро. Лишь одной из сотен тысяч удается это сделать. А значит, КПД процесса не превышает десятых долей процента. Такой КПД не заинтересует ни одного инженера.

Следующий шаг состоял в том, чтобы бомбардировать ядра не альфа-частицами, а протонами, у которых положительный заряд вдвое меньше, а значит, меньше и силы отталкивания от ядер-мишеней. Но в отличие от альфа-частиц, энергия которых достается «бесплатно», протонам надо сначала сообщить кинетическую энергию. А это можно сделать только с помощью достаточно сильного электростатического поля. Так появились ускорители заряженных частиц.

60 лет тому назад, в 1932 году, впервые для бомбардировки ядер были использованы протоны, вылетевшие из ускорителя. И сразу был достигнут впечатляющий успех. Ученики Резерфорда Д. Кокрофт и Э. Уолтон в Англии, а также А. Вальтер, А. Лейпунский и К. Синельников в Харькове осуществили ядерную реакцию на быстрых протонах с литием, который «устоял» перед альфа-частицами в опытах Резерфорда. Реакция, которую они наблюдали, была такой:

$$^{7}_{3}\mathrm{Li}+{}^{1}_{1}\mathrm{H}\rightarrow 2\,{}^{4}_{2}\mathrm{He}.$$

Литий превратился в две альфа-частицы, и, что особенно замечательно, их энергия была равна 17,2 МэВ. А энергия протона, вызвавшего реакцию, была всего около 100 кэВ, т. е. выигрыш энергии составлял порядка 17 МэВ.

Тем не менее, и протоны не решали задачу практического использования ядерной энергии. И по той же причине, что и альфа-частицы. Протоны тоже отталкиваются от ядер, и лишь один из многих сотен тысяч попадает в ядро и участвует в реакции. А ускорять приходится все протоны, в том числе и те, что тратят свою энергию лишь на нагревание литиевой мишени.

В том же 1932 году было сделано

еще одно, важное для всей физики и решающее для интересующей нас проблемы ядерной энергии, открытие. Д. Чедвик (тоже ученик Резерфорда) из анализа собственных исследований и опытов других физиков установил, что при бомбардировке бериллия альфа-частицами из него вылетают неизвестные до того частицы с массой почти такой же, как у протона, но лишенные электрического заряда. Чедвик назвал их нейтронами. Реакция Чедвика записывается так:

$$^{9}_{4}\mathrm{Be}+^{4}_{2}\mathrm{He}\rightarrow ^{12}_{6}\mathrm{C}+^{1}_{0}n.$$

Нейтрон (его обозначают $^{1}_{0}n$), как выяснилось, это вторая (после протона) составная часть ядра.

Открытие нейтронов оживило надежды на возможность использования ядерной энергии. Ведь лишенные заряда нейтроны не отталкиваются от ядер и должны легче попадать в ядра. Правда, их нельзя ускорять, как протоны. Но, как оказалось, их и не надо ускорять. Медленные нейтроны легче проникают в ядра, чем быстрые, так что их даже нужно замедлять. Объясняется это тем, что медленно движущийся нейтрон проводит большее время вблизи ядра и имеет больше шансов быть втянутым в него ядерными силами притяжения.

Нейтрон был сразу принят «на вооружение» исследователями ядра. Он в самом деле оказался много эффективнее, чем протон и альфа-частица. Не один из сотен тысяч, а один нейтрон из ста попадал, например, в ядро азота и вызывал реакцию

$$^{14}_{7}\mathrm{N}+^{1}_{0}n\rightarrow ^{11}_{5}\mathrm{B}+^{4}_{2}\mathrm{He}.$$

При этом энергия вылетающей альфа-частицы во много раз больше энергии вызвавшего реакцию нейтрона.

Казалось бы, теперь есть чем извлекать ядерную энергию. Выяснилось, однако, что задача так просто не решается. В отличие от протонов, нейтроны в свободном виде, вне ядра, не существуют. Нейтрон — частица радиоактивная. С периодом полураспада около 11 минут он испускает бета-частицу (электрон) и превращается в протон. Значит, чтобы получить нейтроны для обстрела ядра, их нужно перед самым «употреблением» выбить из ядер. Это можно сделать, например, пользуясь реакцией бомбардировки бериллия альфа-частицами. Но ведь такие реакции, как мы знаем, малоэффективны, и нейтронов получается так мало, что о техническом энергетическом устройстве на этой основе не может быть и речи. Сложилось парадоксальное положение: частицы, которые имеются в изобилии (альфа-частицы и протоны), непригодны для массового получения энергии, а те частицы, которые для этого как нельзя более подходят (нейтроны), не существуют в природе и их нельзя получить в достаточно большом количестве. Казалось, все-таки правы те, кто считал ядро не складом, а кладбищем энергии.

В 1938 году О. Ган и Ф. Штрассман сделали важное открытие, а в 1939 году Л. Мейтнер поняла и объяснила его. Состояло оно в том, что при попадании нейтрона в уран ядро урана реагирует совсем не так, как на это реагировали другие ядра. Вместо того, чтобы испустить одну-две частицы с энергией в несколько миллионов электронвольт, ядро урана после поглощения нейтрона раскалывается на два осколка с энергией в 80 МэВ каждый. При этом осколки ядра урана, которые тоже представляют собой ядра атомов, оказываются бета-радиоактивными, и к 160 МэВ энергии осколков добавляются еще около 40 МэВ энергии бета-частиц и сопровождающего их гамма-излучения. Так что на каждое ядро урана, испытавшего, как говорят, деление, приходится энергия в 200 МэВ — это даже для ядерных процессов впечатляющая величина. А нейтрон, вызвавший этот взрыв, может быть очень медленным, т. е. почти лишенным энергии.

Само по себе это удивительное явление для решения проблемы использования ядерной энергии ничего не дает, потому что остается прежний вопрос — где взять нейтроны. При-

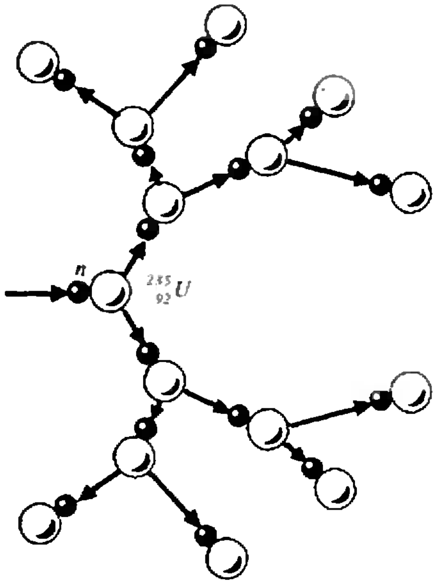
Фредерик Жолио-Кюри (1900—1958).

рода, однако, дала ответ и на него. В том же 1939 году многими исследователями (среди них Ф. Жолио-Кюри) было установлено, что осколки деления ядер урана, сильно перегруженные нейтронами, как бы теряют по 2—3 (в среднем 2,5) нейтрона в каждом акте деления. Некоторые из них теряются в самый момент деления, некоторые немного позже (так называемые запаздывающие нейтроны). Вот эти-то, как их называют, нейтроны деления и могут вызывать деления других ядер.

Оказалось, таким образом, что при делении ядер урана выделяется не только вожделенная ядерная энергия, но и столь же вожделенные нейтроны, которые так трудно получить в большом количестве. Достаточно одному-единственному нейтрону попасть в одно из ядер куска урана и вызвать его деление, чтобы возникла так называемая цепная реакция. И действительно, первое ядро превратится в два осколка и появятся два (или три!) нейтрона. Они очень быстро попадут в другие два ядра, вызовут их деление, и появятся уже 4 осколка и 8 нейтронов. Попав в новые 8 ядер, они, в свою очередь, дадут 16 осколков и 32 нейтрона и т. д. Как снежный ком (но несравненно быстрее) будет расти число осколков и число нейтронов. Разумеется, некоторая часть нейтронов может быть потеряна для процесса цепной реакции. Одни нейтроны могут еще до встречи с очередными ядрами вылететь из куска урана, другие могут попасть в ядра, но не вызвать деления, и т. п. Тем не менее, цепная реакция, должна возникнуть и иметь взрывной характер. Кусок урана должен превратиться в огненный шар.

Но природа приберегла для физиков еще один сюрприз, вернее сюрприз-преграду. Выяснилось, что все описанное выше — деление ядер урана с выделением огромной энергии, нейтроны деления, обеспечивающие возможность цепной реакции,— относится только к так называемому легкому изотопу урана — $^{235}_{92}U$. А в природном уране такого изотопа всего 0,7 %. Ядра же тяжелого изотопа — $^{238}_{92}U$ — только мешают течению цепной реакции, так как они поглощают нейтроны и выводят их из процесса. Перед физиками возникла трудно разрешимая проблема разделения изотопов — выделения из природного урана его легкого изотопа.

И все же оказалось возможным получить цепную ядерную реакцию даже на природном уране — были приняты меры к тому, чтобы нейтроны деления урана-235 не поглощались ураном-238. Этого можно до-



Цепная реакция деления тяжелых ядер.

биться, если сделать нейтроны деления, которые рождаются быстрыми, нейтронами медленными. Что и удалось осуществить Э. Ферми, рассчитавшему и построившему специальную конструкцию из урана и графита. Графит замечателен тем, что он не поглощает, а только замедляет нейтроны. Пятьдесят лет тому назад, 2 декабря 1942 года, в Чикаго Ферми впервые в истории осуществил цепную ядерную реакцию в устройстве, называемом ядерным реактором (тогда оно называлось котлом). Это был гигантский успех: был найден способ получения управляемой ядерной энергии. Об этом событии в условиях тогдашней строгой секретности было сообщено начальству в такой телеграмме: «Итальянский мореплаватель добрался до Нового Света и был дружественно встречен туземцами» (в 1942 году исполнилось 450 лет со времени открытия Америки Колумбом, который, как и Ферми, был итальянцем). В 1946 году, и тоже в декабре, успех Ферми был повторен в нашей стране И. В. Курчатовым.

Интересно, что тяжелый изотоп урана в реакторе оказался не только помехой цепной реакции. Нейтроны определенной энергии при попадании в ядро $^{238}_{92}\mathrm{U}$ превращают его в изотоп $^{239}_{92}\mathrm{U}$ с испусканием гамма-кванта:

$$^{238}_{92}\mathrm{U}+{}^{1}_{0}n\rightarrow{}^{239}_{92}\mathrm{U}+\gamma.$$

Новый изотоп урана радиоактивен и, испустив бета-частицу, превращается в ядро элемента нептуния:

$$^{239}_{92}\mathrm{U}\rightarrow{}^{239}_{93}\mathrm{Np}+{}^{0}_{-1}e.$$

Этот нептуний тоже радиоактивен и превращается в ядро плутония:

$$^{239}_{93}\mathrm{Np}\rightarrow{}^{239}_{94}\mathrm{Pu}+{}^{0}_{-1}e.$$

Причем превращение урана в плутоний происходит довольно быстро: у $^{239}_{92}\mathrm{U}$ и $^{239}_{93}\mathrm{Np}$ периоды полураспада невелики — 23 минуты и 2,3 дня соответственно. Изотоп же плутония испускает альфа-частицу и превращается в... $^{235}_{92}\mathrm{U}$:

$$^{239}_{94}\mathrm{Pu}\rightarrow{}^{235}_{92}\mathrm{U}+{}^{4}_{2}\mathrm{He}.$$

Энрико Ферми (1901—1954).

Казалось бы, счастливая находка: вредный тяжелый уран превращается в нужный для цепной реакции легкий уран. Но... у радиоактивного плутония период полураспада около 24 000 лет, так что пользы от этого превращения не дождаться. Однако ждать и не нужно: $^{239}_{94}\mathrm{Pu}$ во всем сходен с $^{235}_{92}\mathrm{U}$ и годится для осуществления цепной реакции. Ядерный реактор оказался не только источником энергии, но и поставщиком ядерного горючего (и взрывчатого вещества).

Тем временем велась работа и по выделению чистого $^{235}_{92}\mathrm{U}$. Нужно заме-

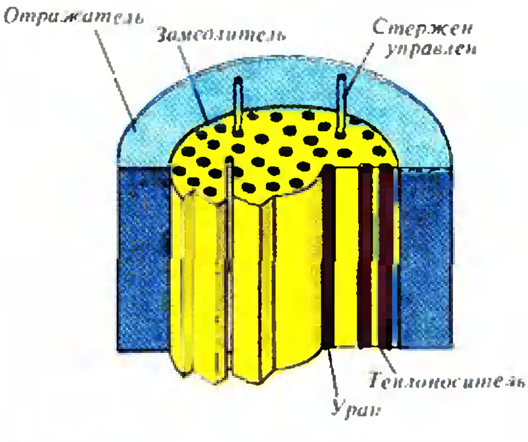


Схема активной зоны атомного реактора.

Игорь Васильевич Курчатов (1903—1960).

тить, что физики умели разделять изотопы еще до войны. Но разработанные лабораторные методы позволяли получать лишь миллионные доли грамма чистого изотопа. Этого было достаточно для научных исследований, но для проведения цепной реакции требовались килограммы, десятки килограммов. Значит, нужно было увеличить масштаб «производства» в миллиарды раз. Двадцать тысяч рабочих, инженеров и специалистов — физиков и химиков — все же справились с этой задачей. В 1945 году нужное количество урана было накоплено, и ядерная энергия была получена в ее взрывном варианте — появилось ядерное оружие, тут же использованное американцами для атаки на японские города Хиросима и Нагасаки. В нашей стране задача разделения изотопов урана тоже была решена*), и в 1949 году была испытана наша первая ядерная бомба.

Так решился вопрос о том, что же такое атомное ядро — кладовая или кладбище энергии. Безусловно, атомное ядро — склад энергии, причем с очень надежным замком. Но ключ к этому замку есть. Это нейтрон.

Что такое хорошо и что такое плохо? В этой статье развитие атомной и ядерной физики представлено как поиск ответа на вопрос, можно ли получить и использовать ядерную энергию. В действительности вплоть до второй мировой войны физики не ставили перед собой такой задачи. Они, как и полагается исследователям природы, изучали атом, а затем и атомное ядро, чтобы узнать, какие законы там действуют и какие явления там происходят. Оказалось, что эти законы и явления допускают возможность получения и использования ядерной энергии, которая немедленно властно вторглась в жизнь людей, в политику государств. Уж очень эта энергия велика!

О законах природы, о научных открытиях не принято, да и не имеет смысла, говорить и спорить, хороши они или плохи. Но о ядерной энергии вот уже полвека идут споры именно такого рода. Говорят, например, что ядерное оружие — это оружие массового уничтожения и что оно таит в себе опасность гибели человеческой цивилизации и человечества. Это верно, и это, конечно, плохо.

Но с другой стороны, не надо забывать, что, по-видимому, именно ядерное оружие предотвратило третью мировую войну. Сейчас мир явно движется к тому, чтобы ядерные бомбы, как орудие войны, были запрещены. Но ядерные бомбы можно использовать и для мирных, полезных целей. Оказалось, например, что подземные ядерные взрывы помогают существенно увеличить добычу нефти в глубоких месторождениях. Предотвращение мировой войны, мирные ядерные взрывы заслуживают, очевидно, оценки «хорошо».

Ядерные реакторы, используемые для получения энергии на ядерных электростанциях (их, впрочем, называют атомными станциями), за пятьдесят лет получили широкое применение. Во многих странах они дают 20—40 процентов потребляемой энергии, а во Франции даже 70 % (в нашей стране — около 10 %). Ядерные

*) В нашей стране научным руководителем работ по разделению изотопов урана и созданной на их основе отрасли промышленности был основатель журнала «Квант» И. К. Кикоин. (*Прим. ред.*)

станции не дымят и не отравляют атмосферу. Они сберегают уголь, нефть, газ — ценное химическое сырье. К тому же запасы этих видов топлива истощаются и рано или поздно иссякнут. Получается, что ядерная энергия пришла к людям своевременно. Это как будто хорошо.

Но... эксплуатация ядерных электростанций связана с возможностью новых для человечества загрязнений — радиоактивных. Ведь осколки деления сильно радиоактивны. Насколько эта опасность серьезна, показала авария в Чернобыле. Об этом, конечно, ничего хорошего сказать нельзя. Необходимо, чтобы физика, сделавшая возможным использование ядерной энергии, сделала ее и вполне безопасной. И прежде всего нужно, чтобы у пультов управления на ядерных электростанциях находились хорошо подготовленные и добросовестные люди.

Еще одна годовщина. Сорок лет тому назад была открыта другая возможность получения ядерной энергии. В 1952 году на атолле Бикини в Тихом океане американцы осуществили первый взрыв так называемой термоядерной бомбы, а вскоре такой взрыв был проведен и в нашей стране. Этот способ получения ядерной энергии во многом прямо противоположен описанному выше уранoво-плутониевому способу. В урановом варианте «зачинщиком» реакции является нейтрон, а конечным «продуктом» — высокая температура. В термоядерном способе, наоборот, все начинается с создания очень высокой температуры, а нейтроны — один из конечных продуктов реакции. В урановом способе «действующие лица» — ядра атомных элементов конца таблицы Менделеева, в термоядерном — сáмого ее начала.

И еще одно различие. Как мы видели, сначала был создан урановый ядерный реактор, а через три года ядерная бомба. В термоядерном же случае оружие появилось 40 лет тому назад, а управляемый термоядерный реактор не удалось пустить в ход и до сих пор, несмотря на усилия физиков многих стран. Но можно не сомневаться в том, что термоядерная энергия — это энергия XXI века и последующих веков. Надеюсь, что те школьники — читатели этой статьи,— кто выберет своей специальностью физику, станут участниками разработки и создания термоядерных реакторов. А в том, что все читатели будут потребителями термоядерной энергии в XXI веке, я почти не сомневаюсь.

Дорогие читатели!

**У вас в руках очередной, уже 8-й номер журнала «Квант».
В наши дни это совсем не тривиальное событие,
ибо закрываются одни журналы, сокращаются объемы других.
Причина понятна всем — резкое удорожание бумаги,
типографских и почтовых услуг, увеличение других расходов.
В результате денег, собранных по подписке, например, на наш журнал,
едва хватило на два номера.
Благодаря поддержке правительства России, учредителей и издательства
нам все же удалось выпустить 8 из 12 номеров,
но их помощь не может быть беспредельной.
И сегодня мы обращаемся к вам — нашим читателям:
найдите возможность выделить из своего бюджета 25 рублей
(если это для вас много, то можно и меньше, если нет, можно и больше),
дойдите до ближайшей почты и вышлите их в адрес:**

*р/с 362505 в Октябрьском отделении МИБ г. Москвы,
МФО 201070 (редакции «Кванта»).*

**Только не откладывайте — завтра может быть поздно.
А мы приложим все усилия, чтобы вы получили все 12 номеров.**

ТВОРЦЫ НОВОЙ АСТРОНОМИИ

Доктор физико-математических наук
Ю. СОЛОВЬЕВ

В 1609 году вышла в свет «Новая астрономия, причинно обоснованная, или Физика неба, изложенная в исследованиях движения звезды Марс по наблюдениям благороднейшего мужа Тихо Браге». В этой гениальной книге Кеплер впервые сформулировал те положения, которые мы называем теперь первым и вторым законами Кеплера.

Первый закон. *Каждая планета движется по эллипсу, в одном из фокусов которого находится Солнце.*

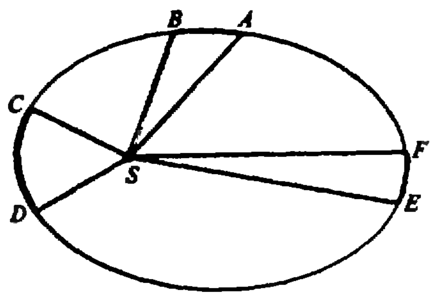
Второй закон. *Планеты движутся по своим орбитам с переменной скоростью таким образом, что площади, описываемые радиусом-вектором от центра Солнца до планеты за равные промежутки времени, оказываются равными.*

Первоначально «Новая астрономия» не обратила на себя такого внимания, какое выпало на ее долю впоследствии. Материальное положение Кеплера не улучшалось. Поэтому в 1612 году он поселился в Линце в качестве директора местной гимназии. Здесь он снова занялся исследованием строения планетной системы. Несколько лет бесконечных вычислений, сотни неудачных выкладок не останавливали Кеплера. 8 марта 1618 года ему пришла в голову мысль сравнить числа, выражающие квадраты времен обращения планет, с числами, равными кубам их средних расстояний. Однако Кеплер ошибся в вычислениях и не нашел никакого совпадения. Лишь 15 мая того же самого года он нашел допущенную им раньше ошибку и получил искомое соотношение. Кеплер писал по этому поводу: «Это соотношение представляло такое блистательное завершение моей семнадцатилетней работы над наблюдениями Тихо, что сперва я подумал, уж не грежу ли я, принимая искомое за данное». Так был найден третий закон Кеплера.

Третий закон. *Квадраты периодов обращения планет пропорциональны кубам больших полуосей их орбит.*

Этот результат был опубликован Кеплером в 1619 году в «Гармонии мира», пожалуй самом его значительном сочинении. В нем больше, чем в других его сочинениях, нашла отражение его непоколебимая вера в то, что мир отлит в математической изложнице. Он искал гармонии планетных движений с геометрическими фигурами, с теорией чисел, с музыкой сфер. Многое из того, что вдохновляло его, оказалось ложным. Но последующие поколения нашли у Кеплера то, что послужило фундаментом новой астрономии.

А частная жизнь складывалась трагично. Его жена и сын умерли во время эпидемии оспы. Кеплер женился во второй раз, но вынужден был



Ко второму закону Кеплера.

Окончание. Начало см. в № 7.

скитаться по Германии, охваченной Тридцатилетней войной. В конце концов Кеплер нанимается на службу к известному полководцу той эпохи, герцогу Валленштейну, в качестве астролога. Нужда вновь заставляет его обратиться к императору с просьбой выплатить ему жалованье за годы императорской службы. Кеплер решает лично поехать к императору в Регенсбург. В дороге в осеннее ненастье он простудился и заболел. 15 ноября 1630 года он умер в бедной гостинице на старом рыбном рынке Регенсбурга, без помощи, вдали от семьи, на 59-м году жизни. При нем нашли 57 экземпляров изданного им календаря на 1631 год, 16 экземпляров его астрономических таблиц и 7 пфеннигов.

Нельзя не сожалеть о том, что жизнь Кеплера протекала в такое печальное время. Лишь только после своей смерти он занял подобающее ему место в науке, увлекая своим примером будущих исследователей.

Весть, полученная от звезд

Время возникновения новой астрономии — рубеж шестнадцатого и семнадцатого веков — было и временем возрождения античности. «Мы — истинные древние!» — восклицал Фрэнсис Бэкон. В этом плане творчество Кеплера, его подход к изучению Вселенной близко примыкает к античности. Для него мироздание было по сути своей математично, он считал, что, изучая геометрию, мы изучаем мироздание. Это скорее античное, чем современное восприятие мира. Кеплер почти не нуждался в экспериментальных фактах — чертеж мира находился внутри него. По-видимому, первым человеком, который попытался узнать, что говорит природа, а не человеческое воображение, был Галилео Галилей.

Галилео родился в итальянском городе Пиза в 1564 году в семье бедного флорентийского дворянина. В детстве получил хорошее домашнее образование, учился в Пизанском университете, но не окончил его за отсутствием средств. Тем не менее он быстро обнаружил свой талант создателя остроумных физических приборов, смелого экспериментатора. Некоторое время он преподавал в Пизе, потом перебрался в Падую. Увлеченно занимался опытами по механике, конструировал новые машины и механизмы, применял свои силы в инженерном деле и фортификации. Преподавая астрономию, Галилей познакомился с учением Коперника, но астрономия как таковая долго не входила в круг его интересов. Так продолжалось до 1609 года, когда в его жизнь вошла зрительная труба.

Кем и когда она была изобретена, доподлинно неизвестно. Во всяком случае, уже спустя пятьдесят лет после ее первого появления, никто не мог указать точных обстоятельств, при которых возник этот чудесный инструмент. Однако остается фактом, что в 1608 году шлифовальщик оптических стекол, родом из Невеля, по имени Ганс Липперсгей, живший в Миддельбурге, представил Генеральным штатам Голландии инструмент — «чтобы далеко видеть». В то же время он просил о привилегии на тридцать лет или о выдаче ежегодной пенсии. Вследствие этой просьбы Генеральные штаты собрали 2 октября названного года особую комиссию, которой и поручили испытать предложенный инструмент. Комиссия дала благосклонный отзыв, и представленный Липперсгеем инструмент, а также три других аналогичных инструмента были куплены у него за необычайно высокую сумму в 900 гульденов. Но в привилегии ему было отказано, так как по мнению комиссии другим лицам было уже известно об этом изобретении.

Без сомнения, это не было простой отговоркой, так как вскоре поступило новое ходатайство Якоба Меция, жившего в Алькмааре. Представляя свою зрительную трубу, Меций сообщал, что это результат двухлетнего труда и размышлений. Он не сомневается, что настоящий инструмент можно еще значительно усовершенствовать, и просит о привилегии, чтобы никто не имел права в течение 22 лет, под страхом конфискации и штрафа в 100 гульденов, продавать такой инструмент. А кроме того, он (Меций) просит наградить его приличной суммой денег. Согласно решению Генеральных штатов, 17 октября 1608 года Мецию было поручено улучшить свой инструмент. Но в привилегии ему было также отказано.

Таковы исторически несомненные факты относительно первого появления зрительной трубы. Таким образом, ясно, что мы совершенно не знаем, кто был ее первым изобретателем.

Предание гласит, что дети Липперсгея как-то играли стеклами от очков. Случайно они расположили их одно за другим так, как расположены стекла в наших нынешних театральных биноклях. Когда они стали глядеть в них, то соседнюю церковь они увидали в увеличенном виде и так, словно она придвинулась к ним. Они сказали об этом своему отцу, который пришел, таким образом, к мысли об устройстве зрительной трубы. По другому преданию, к Липперсгею пришел иностранец и заказал ему отшлифовать два круглых стекла, одно выпуклое, а другое вогнутое. Потом он явился за стеклами. Получив стекла, он расположил их на некотором расстоянии друг от друга и унес с собой. Липперсгея это навело на мысль повторить то же с другими стеклами. К своему удивлению, он увидел отдаленные предметы совсем близко от себя.

Насколько верны эти рассказы — теперь уже невозможно установить. Во всяком случае, нужно допустить, что уже до 1608 года, или самое позднее, в первой его половине, кто-то изобрел простую зрительную трубу. А когда Липперсгей подал свое прошение, то это изобретение было уже достаточно известно. Но как бы там ни было, одно несомненно: вновь изобретенный инструмент быстро получил распространение за пределами Голландии, во Франции и Италии. Ибо уже в следующем году какой-то голландец доставил такой инструмент

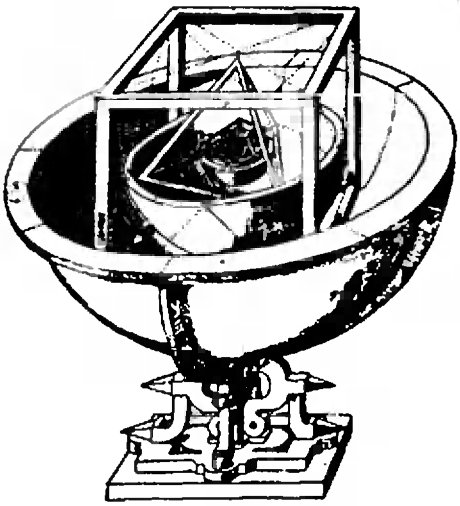


Рисунок из первой книги Кеплера «Космографическая тайна».

в Венецию, где он возбудил сильный интерес.

В Венеции как раз находился тогда Галилей. Видал ли он сам голландский инструмент — неизвестно. Но дошедшая до него техническая новость побудила его заняться изучением нового изобретения. Галилей сумел соорудить себе сначала трубу с трехкратным увеличением, а потом в короткий срок довел увеличение своих инструментов до тридцатикратного. Его величайшей заслугой является то, что он первым широко использовал зрительную трубу для астрономических целей.

Мы не знаем, случайно ли Галилей обратил свою зрительную трубу к небесам, или он предполагал увидеть небесные тела так, как их не видел еще никто, но описания первых ночей, которые он провел у телескопа, сложились в одну из самых волнующих научных книг, когда-либо появлявшихся за всю историю человечества. Это был «Звездный вестник», опубликованный в 1610 году. Все ее страницы дышат страстной увлеченностью, и легко вообразить, в каком состоянии жил Галилей в первые месяцы его работы с телескопом. Почти сразу он открыл лунные кратеры, медленно ползущие по солнечному диску пятна, фазы Венеры и — самое главное — четыре спутника, которые обращались вокруг Юпитера, словно воспроизводя в миниатюре коперниковскую модель Солнечной системы. Он получил неопровержимое доказательство истинности гелиоцентрической системы: Земля не была неподвижна.

Галилей назвал спутники Юпитера в честь тосканского герцога Козимо II Медичи «Медичейскими звездами». Название это очень понравилось тосканскому владыке, который поспешил обласкать Галилея, и тот впервые добился сносных условий для продолжения научной работы, избавившись от необходимости преподавать.

Телескоп Галилея разделил облака Млечного Пути на звезды, чем завершил многовековые словопрения философов о его природе. Млечный Путь оказался на деле массой звезд, собранных в скопления. Противопоставления Земли и неба больше не существовало: все звезды — это далекие Солнца, все планеты подобны Земле.

Один-единственный человек из современных Галилею ученых мог по достоинству оценить открытия своего итальянского коллеги — Иоганн Кеплер. Кеплера больше всего поразило то, что Галилей открыл в пределах Солнечной системы четыре новые планеты. Слух об этом дошел до Кеплера через его друга Иоганна Вакхера за несколько недель до того, как в Праге появился экземпляр «Звездного вестника». Кеплер писал: «Вакхер поведал мне об этом из окна кареты, остановившись перед моим домом. Великое удивление охватило меня, когда я обдумал эту странную новость... Когда я расстался с Вакхером, я начал размышлять о том, может ли увеличиться число планет, не повредив моей «Тайне Вселенной», которую я выпустил в свет тринадцать лет назад. В этой книге пять геометрических тел Евклида допускают лишь шесть планет вокруг Солнца и не более».

Кеплеровскому толкованию строения Солнечной системы, казалось, был нанесен смертельный удар, так как для добавочных планет уже не оставалось геометрических тел Евклида. Вакхер предположил, что новые планеты, возможно, находятся возле какой-нибудь звезды, вокруг которой они и обращаются, доказывая тем самым множественность миров. Когда книга была наконец получена, Кеплер воспрял духом, узнав, что четыре новых небесных тела оказались лунами Юпитера и не опровергают его «Тайны Вселенной». В то же время он был избавлен от необходимости признать множественность миров — идею, которую до конца жизни Кеплер называл «мерзкой философией».

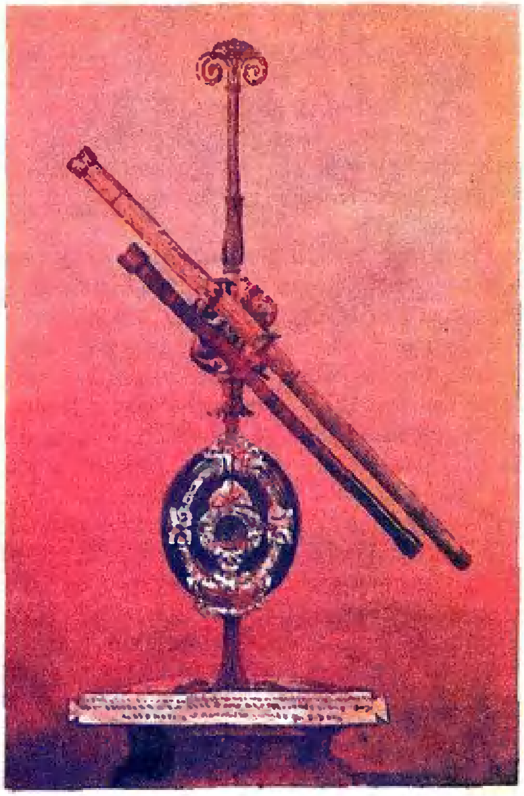
1610 год был годом беспримерных успехов для Галилея. Затем наступили годы разочарований. По поводу открытия солнечных пятен возник вскоре горячий спор, из которого Галилей не вышел безусловным победителем. Фрисландский астроном Фабриций во всяком случае опередил его в публикации открытия, а иезуитский патер Шейнер, в свою очередь настаивавший на правах первенства, сделался его заядлым врагом. В сочинении, вышедшем в 1614 году, некий Симон Мариус утверждал (по всем признакам, совершенно неосновательно), что уже летом 1609 года он наблюдал спутники Юпитера, из чего следовало, что он начал использовать зрительную трубу для исследования небесных явлений раньше Галилея. Такого рода неприятности не могли, однако, поколебать спокойствия его духа. Гораздо хуже было то, что его противники, видя свое бессилие на научном поле битвы, принялись настраивать против него духовные власти.

В 1616 году отцы церкви делают Галилею устное внушение о недопустимости поддержки учения Коперника. Галилей перебрался во Флоренцию и жил здесь спокойно до 1623 года, успешно занимаясь механикой и храня молчание относительно движения Земли.

В 1623 году на папский престол восходит под именем Урбана VIII кардинал Маффео Барберини, друг

Галилея, который за три года до того восхвалял Галилея в латинских стихах. Узнав о восшествии на престол своего доброжелателя, обрадованный Галилей поспешил в Рим, и действительно был принят максимально любезно. После такого приема Галилей ободрился и счел возможным приняться за окончание своего давно задуманного сочинения о системах Вселенной. В течение 1628—1630 годов он был дважды в Риме и уже при первой поездке отдал свой труд на суд духовных цензоров. В 1630 году он получил разрешение печатать его. Это сочинение — «Диалог о двух важнейших системах мира, птолемеевой и коперниковой» — вышло в свет во Флоренции в 1632 году. В нем проводится сравнение между Вселенными Птолемея и Коперника в форме диалога, продолжающегося четыре дня. В беседе участвуют, с одной стороны, сторонники коперниковой системы Сагредо и Сальвиати, а с другой — философ Симплиций, защитник птолемеевой системы. Первый день посвящен общим вопросам движения тел и опровержению аристотелевой механики. Предметом беседы второго дня служит вращение Земли вокруг оси, причем старое воззрение опровергается частью доводами Коперника, частью же новыми, собственными. Движение Земли вокруг Солнца составляет предмет рассуждений третьего дня. Галилей защищает это движение доводами Коперника и, кроме того, разрабатывает теорию, в силу которой земная ось неизменно сохраняет параллельное себе положение. Это — знаменитый закон инерции Галилея. Беседа четвертого дня посвящена объяснению приливов и отливов в связи с движением Земли; это, впрочем, слабейшая из всех теорий Галилея.

Галилей полагал, что поступает предусмотрительно, указав в своем предисловии, что данное сочинение вполне согласно с намерениями церковных владык и даже полезно для их целей. Тем не менее скоро разразилась жестокая буря против новой



Телескоп Галилея.

защиты Коперника. Папа Урбан VIII, настроенный недругами, уже видит в Галилее своего личного врага. Галилея вызвали на суд. 21 июня 1633 года он прибыл в Рим, оставался день и ночь в инквизиционном помещении, а на другой день был переведен в доминиканский монастырь Алла Минерва, где его заставили на коленях отречься от всех своих заблуждений. Что происходило в ночь с 22 на 23 июня в здании инквизиции с 69-летним больным стариком, вероятно, навсегда останется тайной. Нет никакого сомнения, что ему грозили пыткой, но пытали ли его на самом деле — это спорный вопрос, которым историки нашего века много занимались, но окончательно его так и не разрешили. Галилей был приговорен не только к отре-

(Окончание см. на с. 19)

НАТУРАЛЬНЫЙ ЛОГАРИФМ

Билл Д. Олдридж — исполнительный директор Национальной ассоциации преподавателей естественных дисциплин (National Science Teachers Association, USA), один из организаторов и руководителей русско-американского журнала «Quantum». Статья написана для американских школьников и опубликована в этом журнале в 1990 году.

Б. ОЛДРИДЖ

Интересно, что такого «натурального» в числе 2,71828...?

Вы, конечно, знаете, что такое логарифм — это слово используется для обозначения показателя степени некоторого числа n. Выберем основание степени, например число 10, и представим n в виде $n=10^x$; тогда число x записывается так: $x=\log_{10} n$ (для десятичных логарифмов обычно используется обозначение $\lg n$). Наибольший интерес в логарифмической записи чисел представляет то, что с ее помощью сильно упрощаются вычисления.

Великий математик Лаплас (1749—1827) как-то сказал: «Изобретение логарифмов позволило в считанные дни производить те вычисления, которые раньше делались месяцами, и вычислители теперь живут вдвое дольше» (в те времена существовала профессия «вычислитель» — человек, занимающийся вычислениями вручную). Вот простейший пример: чтобы «логарифмически» перемножить два числа, нужно просто сложить показатели степеней. Чему равно произведение 5673 на 1347? Посмотрев в таблицы десятичных логарифмов, мы видим, что $\lg 5673=3{,}75381$ и $\lg 1347=3{,}12937$. Задача умножения, таким образом, сводится к умножению $10^{3,75381}$ на $10^{3,12937}$. Сложив показатели степеней, получаем $10^{6,88318}$. Обратившись снова к таблице логарифмов и считая $\lg n=6{,}88318$, находим n, которое приблизительно равно $7{,}6415\times10^6$, или 7641500. Если бы мы перемножили наши два числа обычным образом, мы бы получили 7641531. Как вы уже заметили, использование логарифмических таблиц дает определенную погрешность. Это происходит из-за того, что значения логарифмов, приведенные в таблицах, были вычислены с определенной точностью (с определенным количеством знаков после запятой). Однако для большинства приложений полученная точность вполне достаточна.

Возможно, в приведенном примере вы не увидели особого упрощения вычислений, но при вычислении сложных выражений, особенно содержащих корни, использование логарифмов (и правил работы с ними) давало существенное упрощение. Я употребил слово «давало», поскольку сегодня с помощью карманного калькулятора можно за доли секунды произвести вычисления, на которые раньше даже с использованием логарифмов требовалось несколько часов, а то и дней. Однако и сегодня другие важные свойства логарифмов находят применение и в науке, и в технике.

Основание 10 (десятичных логарифмов) связано с использованием десятичной системы счисления. А в реальном мире у всех логарифмических зависимостей другое основание. Поэтому такие логарифмы называются реальными или натуральными. В отличие от десятичного натуральное основание есть число иррациональное. Если так, то что же в нем такого «натурального»?

Это число обозначают буквой e, и, как правило, используют его рациональное приближение 2,71828... Хотя я изучал натуральные логарифмы и в школе, и в колледже, и вычислял число *e* математическими методами, в действительности я никогда не понимал, откуда оно взялось. Вычисление числа *e* можно найти во многих работах по математике, и всегда это число представало как некая абстракция. Это меня тревожило.

В конце концов, спустя уже много времени после окончания школы, я все-таки решил для себя выяснить, как можно «извлечь» число *e* из реального мира. Я мог бы выбрать для этой цели процесс радиоактивного распада, или процесс разрядки конденсатора в электрической цепи, или абстрактную теорию энтропии для статистической термодинамики. Но, хотя я по профессии физик, я решил исследовать число *e* на примере биологического явления.

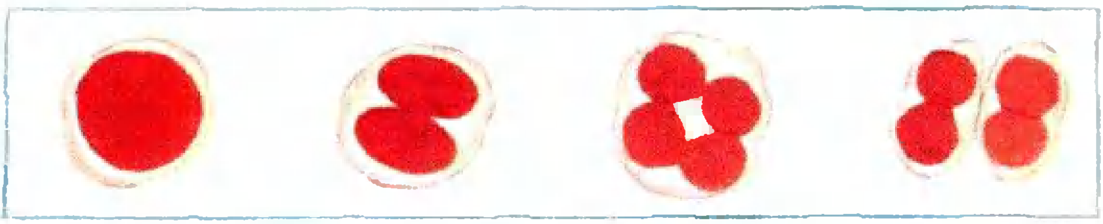
Биологический аспект размножения бактерий

Я изучал размножение бактерий стафилококка в особой питательной среде (Staphylococcum 110 agar). Процесс протекает примерно так. Клетка начинает увеличиваться в размерах, через некоторое время в ней образуется перегородка и в конце концов эта увеличившаяся клетка разделяется на две совершенно одинаковые дочерние клетки. Все компоненты старой клетки равномерно распределяются по двум новым. В свою очередь каждая из дочерних клеток также начинает увеличиваться в размерах, готовясь к новому циклу деления. Каждый раз при делении клеток количество бактерий удваивается. Этот процесс называется бинарным поперечным делением.

Время размножения, т. е. время, которое требуется для удвоения количества бактерий, колеблется от 20 минут до нескольких дней, в зависимости от специфических особенностей бактерий и питательной среды, в которой они размножаются. Среднее время размножения можно определить, пронаблюдав за несколькими циклами размножения. (Поскольку для этого мне потребовался бы микроскоп, которого у меня под рукой не было, я взял цифры из соответствующего пособия.)

Оказывается, бактерии размножаются экспоненциально (удваиваясь каждые 20 минут) только на протяжении определенного отрезка времени. Вначале бактерии должны адаптироваться к среде (время замедленного размножения), затем их размножение идет экспоненциально. Когда питательное вещество уже все использовано, наступает *стационарный период*, и в конце концов бактерии начинают погибать, а кривая, описывающая данный процесс, резко идет вниз. Я ограничился рассмотрением фазы экспоненциального роста.

Если начать наблюдение в тот момент, когда первые дочерние клетки только сформировались, можно заметить, что они размножаются синхронно, по крайней мере на протяжении некоторого времени, а затем начинают выбиваться из ритма. Однако, если рассматривать случайную выборку бактерий, можно заметить, что часть бактерий уже готовы к делению, некоторые только начали увеличиваться в размерах, а остальные находятся в стадии роста. Поскольку все бактерии находятся в разных фазах, любая произвольно выбранная бактерия может начать делиться в произвольное



время. Если бактерий достаточно много, деление клеток происходит асинхронно и почти непрерывно.

Размножение бактерий с точки зрения математики

Из каждой бактерии через определенный период времени получаются две бактерии. Каждая из двух новых дочерних бактерий в свою очередь начинает расти, а затем тоже делится на две части, процесс продолжается до тех пор, пока для новых бактерий достаточно пространства и питательного вещества.

Если у нас вначале имеется 5000 бактерий, а время размножения равно 20 минутам, то сколько бактерий будет через 2 часа? Предположим, мы начали наблюдения в 8 часов. В 8:20 у нас будет 10 000 бактерий, в 8:40 — 20 000 бактерий, в 9:00 — 40 000 бактерий, в 9:20 — 80 000 бактерий, в 9:40 — 160 000 бактерий, а в 10:00, спустя 2 часа, наши 5000 бактерий вырастут до 320 000. Сколько же их будет еще через 2 часа?

Следующим моим шагом была попытка составить уравнение, описывающее взаимосвязь между временем t и количеством бактерий N (за время t из N_0 бактерий получается N бактерий). (Можно допустить, что вначале у нас такое количество бактерий и в таких различных фазах развития, что процесс деления клеток является случайным и непрерывным.) Время t мы можем разделить на n маленьких равных отрезков времени, каждый из таких отрезков обозначим Δt, т. е. мы можем записать

$$\Delta t = t/n.$$

Пусть в течение каждого промежутка времени Δt делится ΔN клеток. Предположим, что $\Delta t = 0{,}01$ секунды и за это время происходит определенное количество делений. Если этот интервал увеличить, скажем, до 0,02 или 0,03 секунды, то и количество делений также увеличится в 2 или 3 раза. Если в начале промежутка времени у нас было бы в два раза больше клеток, то в конце этого промежутка их также было бы вдвое больше. Другими словами, количество клеток ΔN, которые делятся в течение промежутка времени Δt, пропорционально этому отрезку времени и количеству клеток N, которое было в начале рассматриваемого промежутка времени. Математически эту зависимость можно представить в виде пропорции

$$\Delta N \sim N\Delta t.$$

Эта пропорция означает, например, что если Δt или N удвоится, то и количество клеток, которые могут разделиться, также удвоится, а если один из сомножителей будет вдвое меньше, то и количество клеток также уменьшится вдвое.

Введя коэффициент пропорциональности k и записав эту пропорцию в виде равенства, я получил

$$\Delta N = kN\Delta t.$$

Как я уже упоминал, имеется очень большое количество n очень маленьких отрезков времени Δt. Для каждого такого отрезка времени можно записать уравнение, определяющее количество новых бактерий ΔN. Для первого отрезка

$$\Delta N = kN_0\Delta t,$$

где N_0 — количество бактерий на начало первого отрезка времени, т. е. начальное количество клеток.

Количество бактерий в конце первого отрезка времени равно $N_0 + \Delta N$, а если использовать предыдущее равенство, то количество бактерий можно записать как

$$N_1 = N_0 + kN_0\Delta t = N_0(1 + k\Delta t).$$

Теперь я должен был определить количество бактерий в конце второго отрезка времени. Прирост бактерий ΔN должен быть опять пропорционален начальному количеству бактерий N_1 и длине отрезка времени. Использовав снова коэффициент пропорциональности k, получим уравнение для прироста бактерий за второй отрезок времени:

$$\Delta N = kN_1\Delta t.$$

Очевидно, общее количество бактерий в конце второго отрезка времени есть количество бактерий в начале этого отрезка времени плюс прирост бактерий за этот временной промежуток:

$$N_2 = N_1 + kN_1\Delta t = N_1(1+k\Delta t) = \\ = N_0(1+k\Delta t)(1+k\Delta t) = N_0(1+k\Delta t)^2.$$

Теперь, я уверен, вы догадались, что следующим моим шагом было определить количество бактерий в конце третьего отрезка времени. К началу третьего отрезка времени было N_2 бактерий, так что прирост бактерий записывается как

$$\Delta N = kN_2\Delta t.$$

Как и раньше, количество бактерий в конце третьего отрезка времени равно $N_2+\Delta N$. Итак, мы имеем

$$N_3 = N_2 + kN_2\Delta t = \ldots = N_0(1+k\Delta t)^3.$$

По этим вычислениям вы, конечно, уже поняли способ решения задачи, и, вероятно, он вам изрядно надоел. Однако теперь мы уже можем заняться обобщением результатов, что всегда приятно.

Если мы продолжим вычислять количество бактерий в конце каждого промежутка времени, то увидим, что это количество равно количеству бактерий в конце предыдущего отрезка времени, умноженному на $(1+k\Delta t)$. Переходя последовательно от одного промежутка к другому вплоть до начального момента, получим следующее уравнение для количества бактерий в конце n-го отрезка времени:

$$N_n = N_0(1+k\Delta t)^n.$$

Величина N_n есть общее количество бактерий, которое было получено по истечении времени t. Время t мы разделили на n интервалов длиной Δt. Таким образом, $t = n\Delta t$ и $\Delta t = t/n$. (Я приношу свои извинения за утомительные повторы, однако моей целью является полное изложение цепочки моих умозаключений, поэтому я и останавливаюсь на тех моментах, которые обычно опускают.) Итак, подставив вместо Δt его значение из предыдущего равенства, я получил

$$N_n = N_0(1+kt/n)^n.$$

Выражение $(1+kt/n)^n$ можно разложить в биномиальный ряд:

$$\left(1+\frac{kt}{n}\right)^n = 1 + n\frac{kt}{n} + n(n-1)\frac{(kt/n)^2}{2!} + \\ + n(n-1)(n-2)\frac{(kt/n)^3}{3!} + \ldots$$

Если интервал Δt достаточно мал, время t состоит из огромного количества таких интервалов. Мы хотим вычислить сумму членов этого биномиального ряда при очень большом n. При достаточно больших значениях n любой член этого разложения существенно упрощается. Это происходит за счет того, что все члены, включающие n, такие как $n(n-1)(n-2)$, становятся просто степенями n, в данном случае просто n^3. А раз так, то они все сокращаются со степенями n в знаменателях выражений (kt/n), причем показатели степеней всегда совпадают. Таким образом, предел нашего биноминального ряда равен

$$1 + kt + \frac{(kt)^2}{2!} + \frac{(kt)^3}{3!} + \ldots + \frac{(kt)^m}{m!} + \ldots$$

Итак, количество бактерий, полученных за время t, можно представить в виде

$$N_n = N_0\left(1 + kt + \frac{(kt)^2}{2!} + \frac{(kt)^3}{3!} + \ldots \right. \\ \left. \ldots + \frac{(kt)^m}{m!} + \ldots\right).$$

Предположим, что $kt=1$, подставим это значение в наш ряд и, например, для $m=8$ получим

$$1+1+1/2+1/6+1/24+1/120+ \\ +1/720+1/5040+1/40320,$$

или в десятичном виде

$$1+1+0{,}5+0{,}1666666667+ \\ +0{,}0416666667+0{,}0083333333+ \\ +0{,}0013888889+0{,}0001984127+ \\ +0{,}0000248016.$$

Когда я сложил все эти числа, получилось 2,71828... Eureka! (А может, правильнее сказать «déjà vu» — «я это уже где-то видел»?)

Маленькая, удобная, непериодическая константа

Самое интересное в этом то, что если положить $kt=2$, то сумма этого ряда будет 7,389056..., что в точности равно $(2{,}71828...)^2$. Если $kt=3$, то сумма этого ряда равна кубу числа 2,71828..., и т. д. Эта бесконечная непериодическая десятичная дробь, которую мы получили как основание степени, даже не является рациональным числом. Давайте обозначим это число буквой «e». (Это красиво и иррационально, не правда ли?) Значение этого числа (до 16 знаков) — 2,718281828459045. Тогда наше уравнение для количества бактерий, которые получились за время t, станет совсем простым:

$$N=N_0e^{kt}.$$

Теперь определим (как мы уже однажды сделали) натуральный логарифм как степень, в которую надо возвести число e, чтобы получить данное число. (Аналогично тому, как логарифмы по основанию 10 обозначаются lg, краткая запись логарифма по основанию e — ln.) Переписав наше уравнение для размножения бактерий в логарифмической форме, получим

$$kt=\ln(N/N_0),$$

или для времени t —

$$t=1/k\ln(N/N_0).$$

Последнее уравнение показывает, какое время потребуется для того, чтобы из начального количества бактерий N_0 получилось N бактерий. Чтобы пользоваться данным равенством, вам потребуется таблица натуральных логарифмов, но такие таблицы приводятся в пособиях, а также почти все электронные калькуляторы умеют вычислять натуральные логарифмы.

Конечно, я остался очень доволен, когда все мои вычисления были успешно завершены и я выяснил для себя связь между основанием натуральных логарифмов — числом 2,71828...— и явлением реального мира. Однако ничего бы и не произошло, если бы я не решил для себя, что тут что-то не так. Так что, если вам когда-нибудь что-то покажется бессмысленным, не пугайтесь этого и не стыдитесь, а постарайтесь разобраться в этом, каким бы тривиальным занятием это кому-то ни казалось.

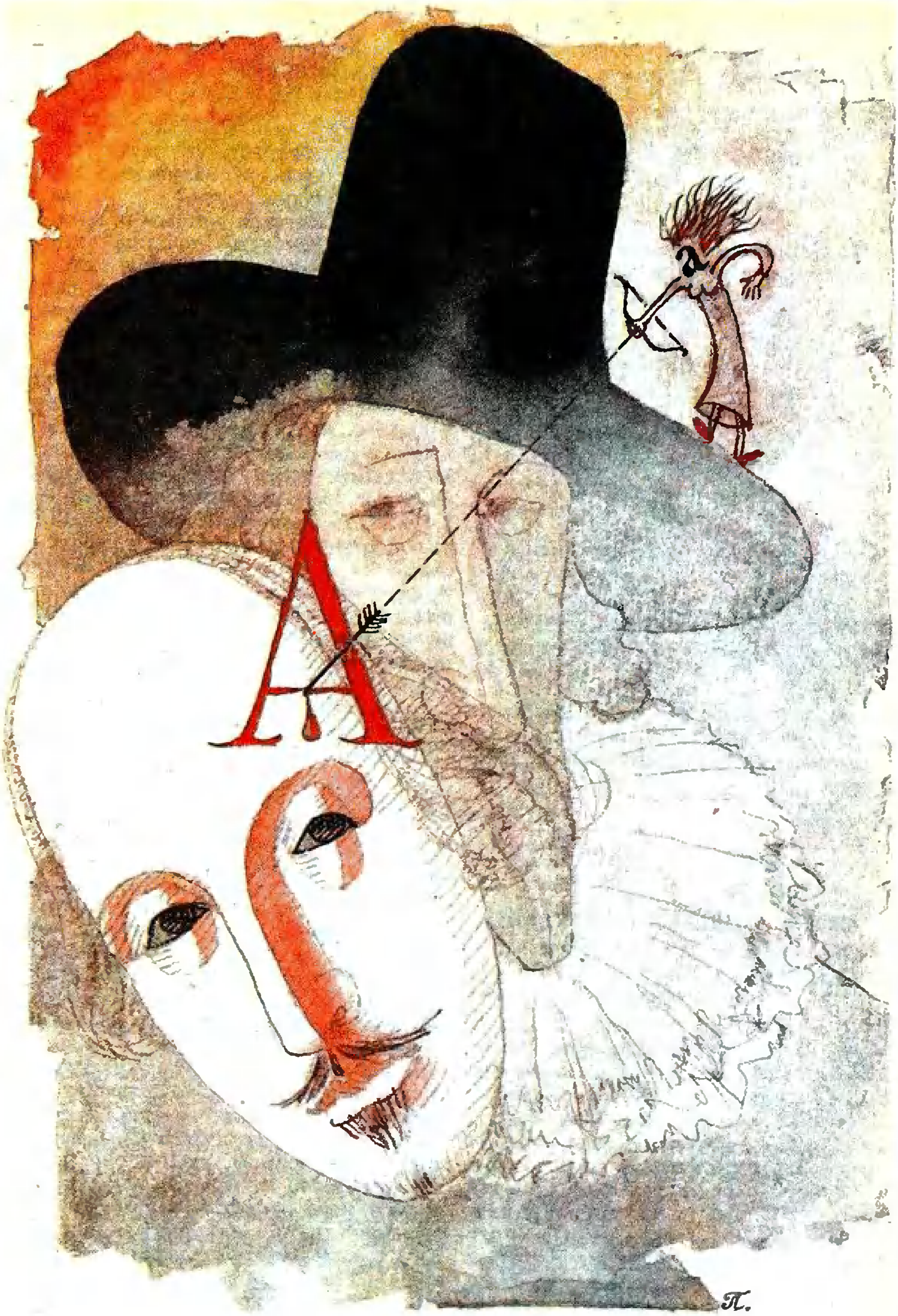
Перевод с английского И. Вахуриной

Творцы новой астрономии

(Начало см. на с. 10)

чению от своих заблуждений, но и к тюремному заключению. Последнее было, однако, тотчас же заменено домашним арестом на вилле Монте-Ривальто в церковном приходе Арчетри. Здесь Галилей умер 8 января 1642 года от изнурительной лихорадки. Даже смерть не примирила с ним церковь; на его могиле не было произнесено надгробной речи, его тело не позволили поместить в семейном склепе Галилеев, на его могиле не разрешили установить ни памятника, ни надгробия. Лишь через сто лет прах Галилея был с почестями погребен в достойной его памяти усыпальнице собора Санта-Кроче во Флоренции, рядом с могилой Микельанджело.

Научное творчество Кеплера и Галилея очень легко охарактеризовать — они создали новую астрономию. В историю культуры, в историю смены мировоззрений они входят совместно и нераздельно; они в равной мере подготовили то окончательное слияние механики и астрономии, которое было сделано Ньютоном, утверждавшим, что он «стоял на плечах гигантов».


A

ШИФР БЭКОНА

М. ГАРДНЕР

Дешифровка — дедуктивная наука, использующая контролируемый эксперимент. Она формирует гипотезы, которые проверяются и часто отбрасываются. Однако то, что остается после проверки, обрастает новыми фактами, и вот наконец исследователь начинает ощущать твердую почву под ногами: его гипотеза согласуется с фактами, осмысленные куски текста высвобождаются из вековой тьмы. Ключ к шифру найден. И тут хорошего материала начинает появляться так много, что за ним трудно бывает уследить. Это — как начало цепной реакции в атомной физике: когда перейден критический порог, реакция безудержно нарастает.

Джон Чэдуик.
Дешифровка линейного письма Б.

Нетрудно понять, почему философы и историки науки столь сильно расходятся в мнении относительно сэра Френсиса Бэкона, писателя, философа и лорда-канцлера елизаветинской эпохи. С одной стороны, его представления о сущности научного метода были примитивны и ошибочны, с другой стороны, он пророчески усматривал в науке обширное поле совместной систематической деятельности, которая могла бы принести человечеству неслыханный расцвет знания. А знание, по утверждению Френсиса Бэкона,— это сила. Человек впервые обретал способность покорять природу и управлять своей собственной судьбой.

Хотя Бэкон не был особенно искусен в математике, он изобрел остроумную шифровальную систему, представляющую значительный интерес для любителей занимательной математики и словесных игр. «Двухлитерный шифр», как называл его Бэкон, стал одним из самых первых примеров того, как легко может быть передана информация с помощью простого двоичного кода. Система Бэкона связана с увлекательной комбинаторной задачей, которая находит практическое применение в кодах, исправляющих ошибки.

Отнюдь не последнюю роль играет и то обстоятельство, что шифр Бэкона самым непосредственным образом связан с наиболее забавными и фантастическими притязаниями бэконистов — неутомимых псевдоученых, которые не покладая рук продолжают изыскивать все новые и новые «доказательства», способные убедить мир в том, что пьесы Шекспира в действительности написаны Бэконом.

Намеки на двухлитерный шифр встречаются в сочинении Бэкона «О приумножении наук» (1605 г.), но подробно он изложил свой метод лишь в более позднем энциклопедическом издании этого сочинения на латинском языке под названием «О достоинстве и приумножении наук» (1623 г.), основательно расширив краткие замечания, которыми ограничился в издании 1605 г. В книге VI Бэкон повторил сформулированные им ранее три достоинства, которыми должен обладать любой хороший шифр: он должен быть (1) «незамысловатым и несложным в работе», (2) «надежным и не поддающимся дешифровке» и (3) «по возможности не вызывать никаких подозрений».

Шифр, обладающий третьим достоинством, принято называть «тайным», или «скрытым», шифром. Он отличается тем, что о самом существовании истинного зашифрованного текста никто и не подозревает. Бэкон был первым, кто изложил хитроумный прием сокрытия текста, использующий два шифровальных алфавита. Подлинное сообщение записывается с помощью одного набора символов, после чего ложное сообщение записывается с помощью второго набора символов. Оба шифра, переплетаясь, образуют единый шифротекст. Если этот текст оказывается перехваченным и от отправителя требуется расшифровка, то он вычеркивает символы истинного текста, поясняя, что они представляют собой «пустые» символы, или «нули»,— так на языке современных криптографов принято называть не имеющие никакого смысла символы, вводимые лишь для того, чтобы затруднить разгадывание шифра. Затем отправитель применяет ключ к оставшимся после «вычеркивания» символам. Поскольку возникает осмысленный текст, пишет Бэкон, кому придет в голову заподозрить, что вычеркнутые «нули» в действительности таят в себе другое послание?

«Впрочем, во избежание подозрений,— продолжает Бэкон,— я присовокупил еще одно ухищрение, которое разработал в бытность свою в Париже, когда был совсем молодым.» Это дополнительное ухищрение представляет собой двухлитерный шифр с ключом, который ставит в соответствие каждой букве алфавита отличную от всех прочих перестановку двух символов в группах из пяти символов. Как объясняет Бэкон, всего существует 32 такие перестановки, что более чем достаточно для представления английского алфавита, который во времена Бэкона состоял из 24 букв (буквы I и J, а также U и V были попарно неотличимы и использовались одна вместо другой). В качестве двух символов Бэкон выбрал буквы *a* и *b* и сопоставил букве A пятерку символов *aaaaa*, букве B — пятерку символов *aaaab*, букве C — пятерку символов *aaaba* и т. д.

«Таким способом удается решить отнюдь не пустяковую проблему,— пишет Бэкон.— Например, мы видим, каким образом мысли можно передавать на какое угодно расстояние с помощью любых предметов, воспринимаемых зрением или слухом, если они могут пребывать в двух разных состояниях, т. е. посредством шаров, сигнальных рожков, факелов, выстрелов и тому подобного.» И действительно, телеграфная азбука Морзе по существу представляет собой двухлитерный звуковой шифр, хотя паузы используются как своего рода третий символ (поэтому для передачи каждой буквы английского алфавита требуется не более четырех точек и тире).

Бэкон намеревался использовать свой шифр для того, чтобы «спрятать» исходный текст (сообщение, подлежащее шифровке) в тексте — «прикрытии», выглядящем внешне вполне невинно. Необходимо только различать для каждой буквы английского алфавита два типографских шрифта. В простейшем случае можно было бы условиться использовать курсивные литеры вместо буквы *a* и прямые вместо буквы *b*. Тогда слово *B*acon (Бэкон) с курсивной первой буквой соответствовало бы перестановке *abbbb*, которая в алфавите Бэкона означала букву Q. Ясно, что любой текст-прикрытие, если он по длине в пять раз превышает исходный текст, может быть напечатан указанным выше образом и передает тайное послание.

Разумеется, различие между прямым шрифтом и курсивом слишком бросается в глаза. Бэкон предложил использовать два типографских шрифта, различия между которыми едва заметны. Лишь тот, кто осведомлен об этих тонких различиях, сумеет «прочитать» печатный текст, пометить каждую его букву, соответственно, символом *a* или *b*, разделить получившиеся символы на пятерки и прочитать скрытое за ними послание. Бэкон привел два примера того как предложенные им типографские ухищрения могут скрыть истинный текст. В одном из них краткий латинский текст-прикрытие, смысл которого сводится к просьбе «не уходи, пока я не приду», расшифровывается как совет противоположный по смыслу: «Беги». Более длинный пример того, как «что угодно может быть записано с помощью чего угодно», представляет собой отрывок, выбранный Бэконом из письма Цицерона (рис. 1). Если заменить все буквы символами a и b в соответствии с двумя типографскими шрифтами, то появится «скрытый» латинский текст (копия подлинного спартанского донесения, некогда посланного с помощью цилиндрического шифровального валика, известного под названием скитала*), который в переводе гласит: «Все пропало. Миндар убит. Съестные припасы солдат исчерпаны. Мы не можем раздобыть провизии и, следовательно, не можем оставаться здесь дольше.»

Типографское искусство во времена Елизаветы по современным меркам стояло на столь низком уровне, что при разглядывании в сильную лупу двух отпечатков одной и той же литеры на одной и той же странице всегда можно было обнаружить небольшие различия. Свинцовые литеры были несовершенны, набор нередко повреждался, типографская краска высыхала неравномерно на грубой увлажненной бумаге, к тому же наборщики часто путали два шрифта на одной и той же странице. Неудивительно, что каждый, кто разделял теорию о том, будто все пьесы Шекспира написаны Бэконом, был склонен подозревать, что Бэкон мог воспользоваться своим шифром, дабы запечатлеть признание своего авторства в ранних изданиях своих сочинений и, быть может, даже испещрил их страницы тайными сообщениями о других своих свершениях.

Типографское искусство елизаветинской эпохи предоставило бэконианцам великолепную арену для ничем не ограниченной игры подсознательных импульсов. С лупой в руке и гибкими двухлитерными правилами, позволяющими (неоднозначно) отождествлять каждую букву латинского алфавита с любой возможной комбинацией символов a и b, хитроумный бэконианец может извлечь из достаточно длинного отрывка шекспировского текста почти все что угодно. Так, первая буква T, встречающаяся на странице, может быть отождествлена с символом a, поскольку верхняя черта у нее тоньше, чем у других букв T. Следующая буква T может быть отождествлена с символом a потому, что на конце верхней перекладины у нее имеется крохотная завитушка, и т. д. Ключи шифров могут варьироваться от одного отрывка к другому. Если бэконианец не дурак, то обнаруживаемые им тайные послания будут исходить из глубины его подсознания, наподобие посланий, принимаемых на спи-

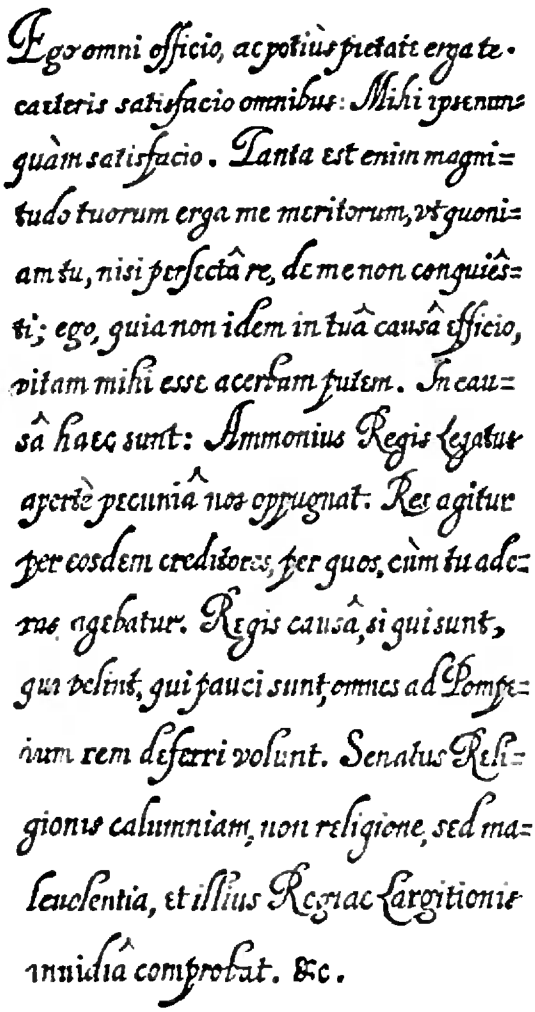

Ego omni officio, ac potius pietate erga te ·
caeteris satisfacio omnibus: Mihi ipse nun=
quàm satisfacio. Tanta est enim magni=
tudo tuorum erga me meritorum, vt quoni=
am tu, nisi perfectâ re, de me non conquieŝ=
ti; ego, quia non idem in tuâ causâ efficio,
vitam mihi esse acerbam putem. In cau=
sâ haec sunt: Ammonius Regis legatus
apertè pecuniâ nos oppugnat. Res agitur
per eosdem creditores, per quos, cùm tu ade=
ras agebatur. Regis causâ, si qui sunt,
qui velint, qui pauci sunt, omnes ad Pompe=
ium rem deferri volunt. Senatus Reli=
gionis calumniam, non religione, sed ma=
leuolentia, et illius Regiae largitionis
inuidiâ comprobat. &c.

Рис. 1.

*) Донесение писалось вдоль образующих цилиндра на обвитом вокруг валика ремне. Ремень после записи снимался. Чтобы прочитать послание, получатель должен был намотать ремень на такой же валик. (*Прим. перев.*)

ритических сеансах с помощью дощечки с буквами или автоматического письма, или передаваемых медиумом из потустороннего мира.

Как ни странно, первая основательная попытка расшифровать пьесы Шекспира не использовала шифр Бэкона. Процветающий популистский политический деятель из Миннесоты Игнатиус Доннелли в своем тысячестраничном «научном труде» «Великая криптограмма» (1888 г.) исходил из гораздо более искусственной шифровальной системы. (Это обширное сочинение вместе с другими книгами того же автора «Атлантида» и «Рагнарок» принадлежат к числу наиболее впечатляющих сочинений «чокнутых» авторов, написанных в Америке до 1900 г.) Применить шифр Бэкона с несгибаемым упорством к пьесам Шекспира и получить лучшие и наиболее причудливые тексты за всю историю бэконианы выпало на долю миссис Элизабет Уэллс Гэллап (1848—1934), учительнице и директору средней школы из Миссисипи.

Подобно Доннелли, миссис Гэллап явила собой великолепный образчик интеллигентного, образованного, честного и искренне заблуждающегося любителя. Ее опус «Двухлитерный шифр сэра Френсиса Бэкона, открытый в его трудах и расшифрованный миссис Элизабет Уэллс Гэллап» (1899) глубоко потряс собратьев-бэконианцев. Миссис Гэллап обнаружила тайные послания не только в пьесах Шекспира, но и в сочинениях Марлоу, Спенсера, Бертока и других авторов, все книги которых по ее мнению были написаны Бэконом. «Королева Елизавета моя истинная мать,— гласило одно из тайных посланий,— и я законный наследник престола. Найдите в моих книгах зашифрованную историю; она поведает великие тайны, каждая из которых, если излагать ее открыто, поставила бы под угрозу мою жизнь.» Многочисленные «великие тайны» оказались пикантными подробностями из жизни елизаветинского двора.

«Сюрприз следовал за сюрпризом,— писала миссис Гэллап,— по мере того, как я расшифровывала одно тайное послание за другим, но не обходилось и без разочарований. Некоторые из открытий во многих отношениях были по духу абсолютно неприемлемыми для меня... Но как у дешифровщика у меня не было выбора, и я отнюдь не несу ответственности за эти открытия, если не считать правильность написания слов.»

«Полковник» Джордж Фабиан (воинское звание было почетным), состоятельный текстильный промышленник, стал одним из рьяных последователей миссис Гэллап. Он пригласил ее в «Ривербэнк Лэбораториз», расположенные в его огромном поместье в Женеве (штат Иллинойс), где создал группу криптоаналитиков, работавших под руководством миссис Гэллап. На посту руководителя криптоаналитической группы миссис Гэллап оставалась на протяжении 20 лет, изучая увеличенные фотокопии елизаветинских рукописей и пытаясь научить своих сотрудников (к их немалому замешательству), как следует расшифровывать такие рукописи.

По иронии судьбы, как отмечает Давид Кан в своей книге «Взломщики кодов», именно в Ривербэнк впервые познакомился с искусством дешифровки молодой Уильям Ф. Фридман. Впоследствии он стал одним из величайших криптоаналитиков мира. (Группа Фридмана раскрыла во время второй мировой войны японский «пурпурный код».) В бытность свою в Ривербэнк Фридман познакомился с одной из ассистенток миссис Гэллап Элизабет Смит. Вскоре они поженились. Супружеская чета Фридманов стала самой знаменитой парой в истории криптоанализа. Спешу уведомить читателей, что они оба довольно скоро поняли, каким образом миссис Гэллап вводила себя в заблуждение. Посвященные миссис Гэллап главы в написанной ими книге «Исследуя шекспировские шифры» не оставляют от дела всей жизни миссис Гэллап камня на камне.

Но вернемся к математической реальности. В последние десятилетия математики разработали множество остроумнейших процедур, позволяющих строить циклические цепочки, в которых все возможные перестановки из n символов по k задаются только один раз каждым набором из k идущих подряд символов. Например, рассмотрим цепочку из 32 символов

aaaaabbbbbabbbaabbababbaaababaab.

Если рассматривать эту цепь как циклическую (соединить конец с началом), то каждая группа из пяти идущих подряд символов представляет собой одну из $2^5=32$ перестановок символов a и b в группах из пяти символов. Построить такую цепь можно 2048 способами, если считать различными цепи, получающиеся при считывании символов одной и той же цепи по и против часовой стрелки. Для двух символов формула, задающая число цепей, имеет следующий вид:

$$2^{(2^{k-1}-k)},$$

где k — число символов в группе. Любая из 2048 цепей дает удобный способ записи какого-то ключа к двухлитерному шифру. Напечатайте по кругу современный английский алфавит (из 26 букв), повторите первые 6 букв еще раз, чтобы довести общее число букв до 32, и припишите изнутри круга цепь из символов a и b (рис. 2). Чтобы получить перестановку, например, для буквы R, выпишите пять символов, начиная с буквы R, по часовой стрелке (или, если угодно, против нее).

Двухлитерный шифр имеет множество необычных применений. Например, колоду из 52 игральных карт можно разложить так, что цвета карт (или их четные и нечетные значения, старшие и младшие карты или любое другое разбиение по двоичному признаку) будут зашифровывать слово или фразу из 10 букв. Разумеется, цепи из 3 символов порождают трехлитерные шифры, из 4 символов — четырехлитерные шифры (генетический код!) и т. д.

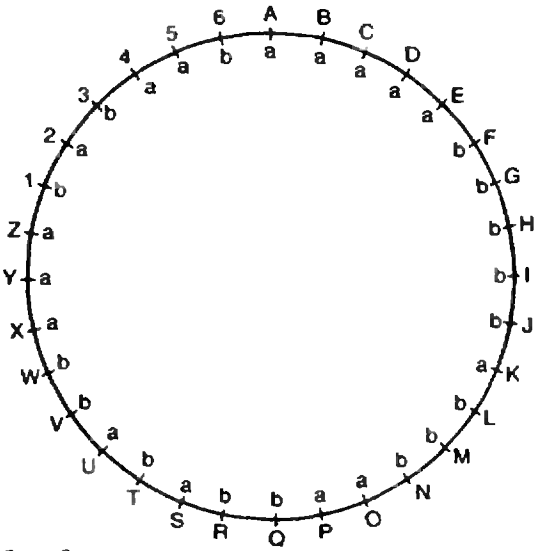


Рис. 2.

Хотя шестикратная длина шифротекста по сравнению с исходным текстом относится к недостаткам шифра Бэкона, несомненным достоинством шифровальной системы Бэкона следует считать то, что она позволяет скрыть в одном и том же шифротексте несколько сообщений. Необходимо только тщательно подобрать типографский шрифт так, чтобы литеры можно было разделить на символы a и b более чем одним способом. Рассмотрим, например, следующий текст:

GkwRt ceUya porrE.

Ключом к шифру мы снова выбираем концентрические круги, изображенные на рисунке 2, который надлежит считывать по часовой стрелке. Если символ a означает буквы латинского алфавита, стоящие на местах с нечетными номерами ($a, c, e, \ldots$), а символ b — буквы, стоящие на местах с четными номерами ($b, d, f, \ldots$), то приведенный выше текст расшифровывается как *aaabb aaaaa babba,* что соответствует слову *CAT* (кошка). Если же символ a означает букву из первой половины алфавита, а символ b — букву из второй половины алфавита, то тот же текст расшифровывается как *aabbb aabba bbbba,* что соответствует слову *DOG* (собака). Если символ *a* означает прописную букву, а символ *b* — строчную, то текст расшифровывается как *abbab bbabb bbbba*, что соответствует слову *PIG* (свинья).

А вот упражнение для читателя:

QUZGF MTXYZ JLUIY XNEEN WLREW TSNJE.

Используя тот же ключ, что и раньше, попробуйте определить три способа разбиения английского алфавита на 2 равные части так, чтобы приведенный выше текст допускал три различных перевода — три фамилии знаменитых математиков, каждая из которых (в английском варианте) состоит из 6 букв. (Указание: три разбиения алфавита, о которых идет речь, имеют отношение к фамилии поэта, ногам и топологии.)

Хотя сам Бэкон никогда не использовал подобную метафору в явном виде, его шифр можно рассматривать как своего рода символическое воплощение его взглядов на научное знание. И поныне этих взглядов придерживаются многие философы и ученые, работающие в области естественных наук. Бэкон был убежден в том, что число законов природы не бесконечно велико. Подобно своим собратьям-англиканцам, он считал, что Господь сотворил естественный мир, отделенный четкой границей от мира сверхъестественного. Именно в естественном мире конечное число простых принципов, комбинируясь наподобие букв в *n*-литерном шифре, образуют все законы природы.

В XIX веке английский логик Джон Венн отметил это обстоятельство на странице 357 своей «Эмпирической логики». Позицию Бэкона Венн охарактеризовал как «*алфавитный* взгляд на Вселенную в своей наиболее крайней форме... Мы обнаруживаем, что [Вселенная] разбита, разделена на части и тщательно перенумерована по всем направлениям, в результате чего, сколь ни чудовищно велико возможное число комбинаций, образуемых этими элементами, оно все же *конечно*, и, следовательно, комбинации открывают свои секреты усидчивому терпению при неукоснительном следовании надлежащим правилам».

Наука, если продолжить эту метафору, представляет собой грандиозную задачу криптографического анализа. Бэкон был убежден в том, что в конце концов, причем не в отдаленном будущем, все шифры будут раскрыты и человечество познает не всю истину любой ценой, а все основные естественные законы. Будущее науки, таким образом, сводится к восполнению деталей и к использованию законов природы в новых изобретениях.

Хотя немногие из современных ученых могли бы отважиться на подобное предсказание, они нередко высказывают не столь универсальные бэконианские суждения применительно к той или иной конкретной науке. Так, Найджел Коулдер в своем живо написанном обзоре новой астрономии «Кипящая Вселенная» (1969 г.) говорит о том, что XX столетие может оказаться уникальным в истории астрономии как столетие, в котором астрономы впервые стали «всезнайками», познав в общих чертах основные направления развития всего космоса. «Неужели,— добавляет Коулдер,— у наших потомков наши идеи будут вызывать такую же снисходительную усмешку, какую вызывают у нас идеи наших предков?»

Кто может с уверенностью сказать, даже если речь идет о какой-то конкретной науке, окажется ли в конце концов (что бы это ни значило) Бэкон прав или неправ? Мы можем лишь утверждать, что сейчас природа представляется нам гораздо более «непричесанной» и сложной, чем казалось лорду-канцлеру. Существуют шифры внутри шифров, которые в свою очередь также заключены в шифрах, и пока мы не ухватили даже за кончик нити, ведущей к ответу на вопрос, обрывается ли этот процесс на каком-нибудь этапе или продолжается до бесконечности.

Перевод с английского Ю. Данилова

„Квант" улыбается

Груки

Имя Пита Хэйна (род. в 1905 г.) широко известно не только на его родине в Дании, но и во всей Скандинавии и во многих англоязычных странах. Такая популярность неудивительна. XX век вряд ли насчитает много людей, в которых счастливо уживались поэт, романист, эссеист, художник, архитектор и инженер-изобретатель и которые к тому же сумели во всех этих ипостасях проявить себя талантливо.

Наибольшую славу П. Хэйну принесли его короткие стихи — груки (название придумано им самим). Он начал писать их во время нацистской оккупации в Дании. Двуплановость, двусмысленность груков позволяли датчанам говорить о том, что их действительно волновало. Эта особенность груков сохраняется и впоследствии. Создатель кибернетики Н. Винер, большой почитатель таланта П. Хэйна, особенно выделял эту черту: «Его стихи следует читать по крайней мере на двух уровнях — внешнем и более глубоком. И в том и в другом случае они вызывают во мне восхищение. Какое богатство значительных мыслей заключено в них!» Когда П. Хэйн работал в знаменитом Копенгагенском институте теоретической физики, Нильс Бор избрал именно его своим партнером по «интеллектуальному пинг-понгу». Многие строчки Хэйна стали поговорками, крылатыми словами. Они настолько прочно вошли в обиход, что в свою очередь дали одному критику основание для следующего афоризма: «Блестящий оратор — это человек, способный произнести хорошую речь, ни разу не процитировав Пита Хэйна».

П. Хэйн издал около 20 сборников груков — на английском и датском языках. Их популярности в немалой степени способствовали рисунки автора к своим стихотворениям.

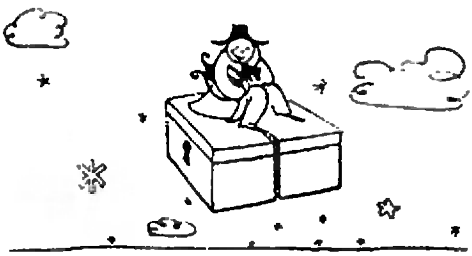
Предлагаем вам несколько груков с авторскими иллюстрациями. Оригинальные тексты содержатся в английских сборниках, вышедших в 1966—1972 гг. в Копенгагене в издательстве Borgen. Для тех, кто захочет попробовать свои силы в переводе, мы приводим тексты груков на английском языке.

П. ХЭЙН

ПАРАДОКС ЖИЗНИ

Философский грук

Когда я думаю о замысле Творца,
когда меня загадка жизни мучит,
встают перед глазами два ларца,
и в каждом заперт
от другого ключик.



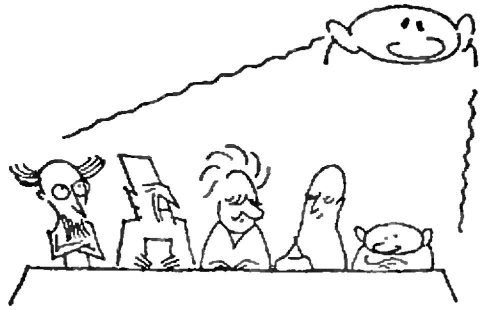
THE PARADOX OF LIFE

Philosophical grook

A bit beyond perception's reach
I sometimes believe I see
that Life is two locked boxes, each
containing the other's key.

АРИФМЕТИКА СОТРУДНИЧЕСТВА

К законам общности
от сути частности
приходишь без долгих раздумий:
сумма талантов
равна их разности,
а сумма бездарностей — сумме.



THE ARITHMETIC OF CO-OPERATION

When you're adding up committees
there's a useful rule of thumb:
that talents make a difference,
but follies make a sum.

ВСЕЗНАНИЕ

Знать, где предел
твоих знаний проложен
и что за пределом этим,
пожалуй, единственно возможное
всезнание на свете.

OMNISCIENCE

Knowing what
thou knowest not
is in a sense
omniscience.

ПРИ СВЕЧЕ

Когда бы мы
могли начать
с печальной
мудрости огарка,
как помогла бы нам
свеча,
когда она
горела ярко.

CANDLE WISDOM

If you knew
what you will know
when your candle
has burnt low,
it would greatly
ease your plight
while your candle
still burns bright.

Перевел с английского и подготовил публикацию Г. Варденга

Задачник „Кванта"

Задачи

М1356 — М1360, Ф1363 — Ф1367

Этот раздел ведется у нас из номера в номер с момента основания журнала. Публикуемые в нем задачи нестандартны, но для их решения не требуется знаний, выходящих за рамки школьной программы. Наиболее трудные задачи отмечаются звездочкой. После формулировки задачи мы обычно указываем, кто нам ее предложил. Разумеется, не все эти задачи публикуются впервые.

Решения задач из этого номера следует отправлять не позднее 1 ноября 1992 года по адресу: 103006, Москва, К-6, ул. 1-я Тверская-Ямская, 2/1, «Квант». Решения задач из разных номеров журнала или по разным предметам (математике и физике) присылайте в разных конвертах. На конверте в графе «Кому» напишите: «Задачник «Кванта» № 8—92» и номера задач, решения которых вы посылаете, например «М1356» или «Ф1363». В графе «...адрес отправителя» фамилию и имя просим писать разборчиво. В письмо вложите конверт с написанным на нем вашим адресом (в этом конверте вы получите результаты проверки решений).

Условия каждой оригинальной задачи, предлагаемой для публикации, присылайте в отдельном конверте в двух экземплярах вместе с вашим решением этой задачи (на конверте пометьте: «Задачник «Кванта», новая задача по физике» или «...новая задача по математике»).

В начале каждого письма просим указывать номер школы и класс, в котором вы учитесь.

Задачи Ф1363 — Ф1367 предлагались на Межреспубликанской физической олимпиаде 1992 года.

М1356. Докажите, что если $abc=4Rrr_c$, где a, b, c — стороны треугольника, R, r, r_c — радиусы описанной, вписанной и одной из вневписанных окружностей, то треугольник прямоугольный. (Вневписанная окружность касается стороны и продолжений двух других сторон.)

Б. Турешбаев, ученик 11 класса

М1357. Докажите, что оба числа $91!\cdot 1901!-1$ и $92!\cdot 1900!+1$ делятся на 1993.

Ю. Калиниченко

М1358. Назовем кубоидом шестигранник, все грани которого — четырехугольники. Докажите, что если три из четырех его диагоналей (не лежащих на его гранях) пересекаются в одной точке, то и четвертая проходит через эту точку.

В. Дубровский

М1359. Пусть $0<a_0\leqslant a_1\leqslant\ldots\leqslant a_n$. Докажите, что уравнение $a_0+a_1\cos x+\ldots+a_n\cos nx=0$ имеет на отрезке $[0, \pi]$

а) хотя бы один корень;

б)* ровно n корней.

А. Белов, В. Сендеров

М1360. Обозначим через p_{mn} число различных покрытий шахматной доски размерами $m\times n$ клеток $mn/2$ костями домино (прямоугольниками 1×2 клетки; разумеется, мы считаем одно из чисел m и n четным).

а) Докажите, что $p_{2\,n}=f_n$ — последовательность, задаваемая соотношением $f_{n+1}=f_n+f_{n-1}$; $f_1=1$, $f_2=2$ (последовательность Фибоначчи).

б)* Докажите, что (для четных n) верны оценки:

$$(3/2)^{n^2/2}<p_{n\,n}<2^{n^2/2}.$$

А. Китбалян

Ф1363. Масса Харона, недавно открытого спутника Плутона, в 8 раз меньше массы планеты. Плутон и Харон обращаются по круговым траекториям вокруг общего центра масс, причем они все время «смотрят друг на друга», т. е. система вращается как единое твердое тело. Расстояние между центрами тел $R=19\,640$ км, радиус Харона $r=593$ км. Определите относительное различие в ускорениях свободного падения для наиболее близкой к Плутону и наиболее удаленной от него точек Харона.

В. Белонучкин

Задачник „Кванта"

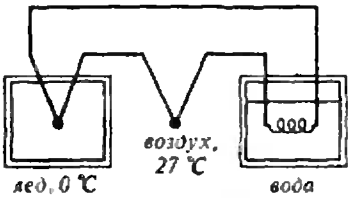


Рис. 1.

Ф1364. Один из спаев термопары находится в комнате при температуре $t_1=27$ °C, а второй — в теплоизолированном сосуде со льдом, имеющим температуру $t_2=0$ °C (рис. 1). Мощность, развиваемая термопарой, выделяется на сопротивлении нагревателя, который помещен в другой теплоизолированный сосуд, содержащий воду. Оцените, на сколько повысится температура воды к моменту окончания плавления льда. Считайте, что все сопротивление цепи сосредоточено в нагревателе. Массы воды и льда одинаковы. Удельная теплоемкость воды $c=4{,}2$ кДж/(кг·К), удельная теплота плавления льда $\lambda=335$ кДж/кг.

А. Шеронов

Рис. 2.

Ф1365. Заряженная частица с кинетической энергией W пролетает мимо длинного равномерно заряженного провода. Частица движется в плоскости, перпендикулярной проводу, и в результате отклоняется на небольшой угол α от первоначального направления полета (рис. 2). Найдите этот угол, если заряд частицы e, а заряд единицы длины провода q. На расстоянии R от длинного провода напряженность поля $E=q/(2\pi\varepsilon_0 R)$.

В. Можаев

Ф1366. В «черном ящике» находятся постоянный резистор и нелинейный элемент, которые могут быть включены последовательно или параллельно. Вольт-амперные характеристики для обоих включений приведены на рисунке 3. Найдите по этим данным сопротивление резистора. Какой нелинейный элемент может находиться в «ящике»?

А. Зильберман

Ф1367. Полуцилиндр изготовлен из оптически прозрачных цилиндрических слоев с разными значениями показателя преломления n. Полученная зави-

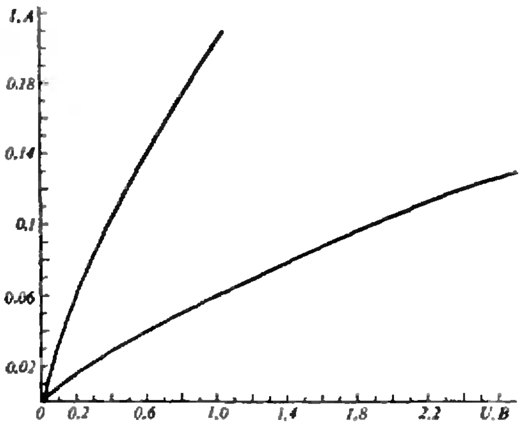


Рис. 3.

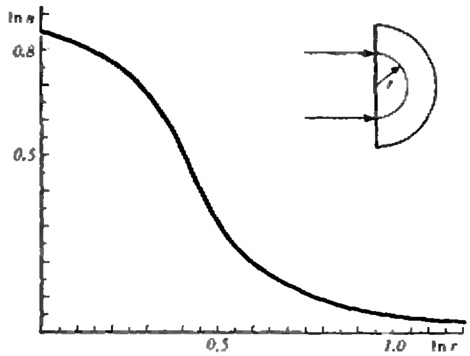


Рис. 4.

симость n от радиуса слоя r изображена на рисунке 4 в координатах $\ln n$ и $\ln r$. Используя данную зависимость, найдите радиусы полуокружностей, по которым сможет распространяться тонкий пучок света при нормальном падении на плоскую поверхность полуцилиндра.

В. Можаев

Решения задач

М1326—М1330, Ф1343—Ф1347

М1326. Последовательность $\{a_n\}$ определяется по следующим правилам: $a_0=9$, $a_{k+1}=3a_k^4+4a_k^3$ для любого $k>0$. Докажите, что a_{10} содержит более 1000 девяток (в десятичной записи).

Докажем, что если a_k оканчивается l девятками, т. е. имеет вид $a_k=a\cdot10^l-1$, где a — натуральное число, то a_{k+1} оканчивается не меньше чем $2l$ девятками.

В самом деле,

$$a_{k+1}=3(a\cdot10^l-1)^4+4(a\cdot10^l-1)^3.$$

Раскрывая скобки и приводя подобные члены, получим

$$a_{k+1}=14\cdot10^{2l}-12a\cdot10^l+3+N\cdot10^{2l}+12a\cdot10^l-4=$$
$$=P\cdot10^{2l}-1,$$

откуда видно, что последние $2l$ цифр числа a_{k+1} — девятки. Поскольку $a_1=9$, число a_{10} оканчивается не меньше чем на $2^{10}>1000$ девяток.

Н. Вялый

М1327. Круг поделили хордой AB на два круговых сегмента и один из них повернули вокруг точки A на некоторый угол. Пусть при этом повороте точка B перешла в точку D. Докажите, что отрезки, соединяющие середины дуг сегментов с серединой отрезка BD, перпендикулярны друг другу.

При этом повороте середина H хорды AB переходит в середину K хорды BD. Пусть $AB=2h$.

Рассмотрим наш круг еще до поворота (рис. 1). Высота $BH=h$ прямоугольного треугольника EBC делит его на два подобных треугольника с некоторым коэффициентом подобия k:

$$\frac{EH}{h}=\frac{h}{CH}=k.$$

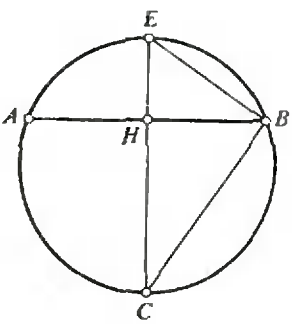


Рис. 1.

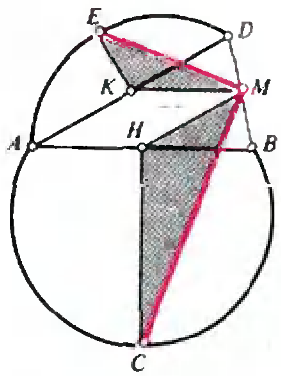


Рис. 2.

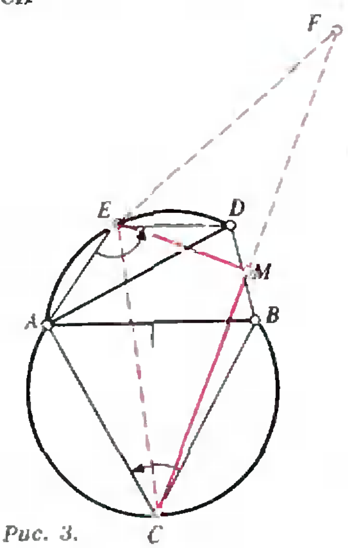


Рис. 3.

Рассмотрим теперь конфигурацию после поворота (рис. 2). Докажем, что треугольник EMC — прямоугольный с тем же отношением катетов k.

Отрезки MK и MH — средние линии треугольника ABD, так что $MKAH$ — ромб (со стороной h). Треугольники EKM и MHC подобны, поскольку углы EKM и MHC равны, а стороны, их заключающие, пропорциональны:

$$\frac{EK}{h}=\frac{h}{MC}=k.$$

Более того, $EK\perp MH$, $MK\perp CH$, так что один треугольник получается из другого поворотом на 90° и сжатием с коэффициентом k, поэтому и третьи стороны этих треугольников — ME и MC — перпендикулярны, что и требовалось доказать.

Существуют и другие решения этой задачи, в частности, использующие композиции геометрических преобразований. Вот одно из них.

Рассмотрим композицию R двух поворотов: первый — с центром C на $\angle BCA=\gamma$, второй — с центром E на $\angle AED=\varepsilon$ (рис. 3).

Поскольку $\gamma+\varepsilon=180°$, R — поворот на 180°, т. е. симметрия относительно некоторой точки M. (В самом деле, направление любого вектора на плоскости после применения такого преобразования меняется на противоположное; отсюда следует, что для любой точки X плоскости из $R(X)=Y$ следует, что $R(Y)=X$ и что середина отрезка XY — неподвижная точка преобразования R.)

Ясно, что $R(B)=D$, поэтому центр симметрии M как раз и есть середина отрезка BD. Пусть $R(C)=F$ (рис. 3), тогда F получается из C поворотом с центром E на $\angle CEF=\varepsilon$; при этом M — середина основания CF равнобедренного треугольника CEF, поэтому $EM\perp CF$.

З. Насыров, В. Дубровский

***M1328.** Вещественные числа $x_1, x_2, \ldots, x_n$ принадлежат отрезку $[-1;\ 1]$, причем сумма кубов этих чисел равна 0. Докажите, что сумма $x_1+x_2+\ldots+x_n$ не превосходит $n/3$.*

Первое решение. Рассмотрим многочлен

$$P(x)=4(x+1)(x-1/2)^2=(x+1)(4x^2-4x+1)=4x^3-3x+1.$$

Сложив n очевидных неравенств $P(x_i)\geqslant 0$, где $i=1, 2, \ldots, n$, получим

$$-3(x_1+x_2+\ldots+x_n)+n\geqslant 0,$$

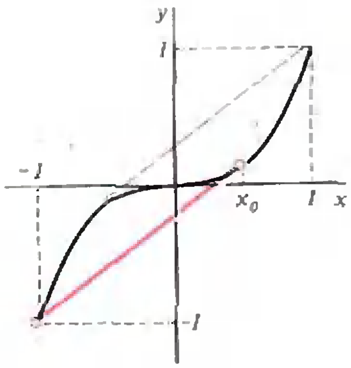
откуда

$$x_1+x_2+\ldots+x_n\leqslant n/3.$$

Конечно, не очень понятно, как додуматься до такого решения. Вот один из возможных подходов — основанный на геометрических соображениях.

Разместим на графике функции $y=f(x)=x^3$, $-1\leqslant x\leqslant 1$ (см. рисунок) n одинаковых масс в точках с абсциссами $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Пусть

$$X=\frac{x_1+x_2+\ldots+x_n}{n},\quad Y=\frac{x_1^3+x_2^3+\ldots+x_n^3}{n}$$



— координаты центра C этих n масс. Ясно, что точка C лежит в пределах «выпуклой оболочки» нашего графика, в частности, выше касательной к графику, проведенной из точки $(-1, -1)$,— красной прямой на рисунке. Найдем уравнение этой касательной. Это — прямая $y=g(x)=t(x+1)-1$, где t выбрано так, что разность функций

$$f(x)-g(x)=x^3-(t(x+1)-1)=(x+1)(x^2-x+1-t) \qquad (*)$$

имеет, кроме $x=-1$, кратный корень $x=x_0$. Для этого дискриминант квадратного трехчлена $x^2-x+1-t$ должен обращаться в 0: $1-4(1-t)=0$, откуда $t=3/4$, а соответствующий корень $x_0=1/2$. Поскольку точка $C(X, Y)$ лежит не ниже красной прямой $y=g(x)$, т. е.

$$Y \geqslant \frac{3}{4}X-\frac{1}{4},$$

при $Y=0$ получаем требуемую оценку $X \leqslant 1/3$.

(Заметим, что многочлен $(*)$ — это, с точностью до множителя, тот самый «взятый с потолка» многочлен $4(x+1)(x^2-x+1/4)=4(x+1)(x-1/2)^2$, который фигурировал в первом решении.)

Второе решение. Пусть $x_1, \ldots, x_n$ — набор чисел, удовлетворяющий условиям задачи. Пусть среди них k неотрицательных: $y_1, \ldots, y_k$ и $l=n-k$ отрицательных: $-z_1, \ldots, -z_l$. Тогда

$$s=x_1+\ldots+x_n=y_1+\ldots+y_k-z_1-\ldots-z_l.$$

По условию,

$$y_1^3+\ldots+y_k^3=z_1^3+\ldots+z_l^3.$$

Обозначим эту сумму через x. Поскольку положительные числа z_i $(i=1, 2, \ldots, l)$ не превосходят единицы, имеем $l \geqslant x$, т. е. $k \leqslant n-x$.

Оценим число s сверху. Так как $z_j^3 \leqslant z_j$ при $1 \leqslant j \leqslant l$, то $z_1+\ldots+z_l \geqslant x$. С другой стороны, поскольку *)

$$\left(\frac{y_1+y_2+\ldots+y_k}{k}\right)^3 \leqslant \frac{y_1^3+y_2^3+\ldots+y_k^3}{k},$$

то

$$y_1+\ldots+y_k \leqslant k^{2/3}x^{1/3} \leqslant (n-x)^{2/3}x^{1/3}.$$

Таким образом,

$$s \leqslant (n-x)^{2/3}x^{1/3}-x.$$

Докажем, что

$$(n-x)^{2/3}x^{1/3}-x \leqslant \frac{n}{3}.$$

После преобразований этого неравенства получаем равносильное неравенство

$$(n-x)^2x \leqslant \left(x+\frac{n}{3}\right)^3,$$

или

$$3x^2-\frac{2}{3}nx+\frac{n^2}{27} \geqslant 0,$$

*) См., например, «Квант», 1990, № 4, с. 58.

т. е.

$$\left(3x-\frac{n}{3}\right)^2\geqslant 0.$$

Утверждение задачи доказано.

Из решения видно, что неравенство задачи может переходить в равенство лишь при n, кратных 9. При этом $k=8n/9$; $y_i=1/2$ при $i=1, \ldots, k$; $z_i=1$ при $i=1, \ldots, l$.

Н. Васильев, Ф. Назаров, В. Сендеров

***М1329.** Докажите, что в выпуклом шестиугольнике ABCDEF три прямые, соединяющие середины противоположных сторон, пересекаются в одной точке в том и только в том случае, если площади треугольников ACE и BDF равны.*

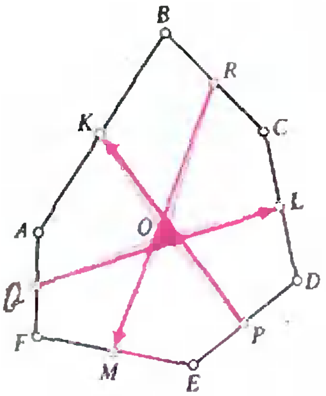


Рис. 1.

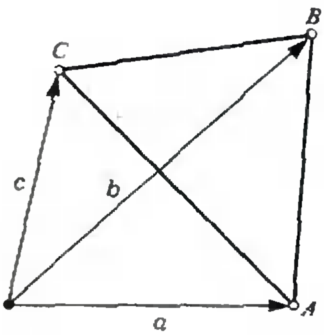


Рис. 2.

Пусть K, R, L, P, M, Q — середины сторон шестиугольника $ABCDEF$ (рис. 1), малые жирные буквы означают векторы, идущие в соответствующие точки A, B, ..., F, K, R, ..., Q из некоторой точки O. Тогда $\mathbf{k}=(\mathbf{a}+\mathbf{b})/2$, $\mathbf{r}=(\mathbf{b}+\mathbf{c})/2$, ..., $\mathbf{q}=(\mathbf{f}+\mathbf{a})/2$, поэтому $\mathbf{k}+\mathbf{l}+\mathbf{m}=\mathbf{p}+\mathbf{q}+\mathbf{r}$ (обе суммы равны $(\mathbf{a}+\mathbf{b}+\ldots+\mathbf{f})/2$).

Удобнее всего воспользоваться для записи решения операцией $[\mathbf{u}, \mathbf{v}]$ — *псевдоскалярным произведением* векторов $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$. Напомним ее определение и основные свойства.

$[\mathbf{u}, \mathbf{v}]$ — это произведение длин векторов на синус угла от первого вектора до второго, с учетом направления вращения (угол отсчитывается против часовой стрелки), другими словами — это площадь параллелограмма, построенного на векторах $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ с учетом ориентации. Тогда для любых $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$, $\mathbf{w}$

$$[\mathbf{u}, \mathbf{u}]=0,\ [\mathbf{u}, \mathbf{v}]=-[\mathbf{v}, \mathbf{u}],\ [\mathbf{u}, \mathbf{v}+\mathbf{w}]=[\mathbf{u}, \mathbf{v}]+[\mathbf{u}, \mathbf{w}].$$

Площадь треугольника с вершинами в концах векторов $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ равна по модулю

$$|([\mathbf{a}, \mathbf{b}]+[\mathbf{b}, \mathbf{c}]+[\mathbf{c}, \mathbf{a}])/2|$$

(причем знак последней суммы зависит от ориентации треугольника; рис. 2). Наконец, момент силы $\overrightarrow{AB}$, приложенной к твердому телу, относительно точки O (произведение силы на плечо) равен $[\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}]/2$ (рис. 3).

Записать условие, что отрезки PK, QL и RM пересекаются в одной точке, нам поможет как раз соображение из механики твердого тела. Рассмотрим $\overrightarrow{PK}$, $\overrightarrow{QL}$ и $\overrightarrow{RM}$ как три силы, приложенные к твердой пластине. Заметим, что сумма этих трех векторов равна нулю: $(\mathbf{k}-\mathbf{p})+(\mathbf{l}-\mathbf{m})+(\mathbf{m}-\mathbf{r})=0$. Для того чтобы пластина под их воздействием не вращалась, необходимо и достаточно, чтобы сумма их моментов (относительно некоторой точки O) равнялась нулю:

$$[\mathbf{k}, \mathbf{p}]+[\mathbf{l}, \mathbf{q}]+[\mathbf{m}, \mathbf{r}]=0, \qquad (*)$$

а это будет лишь в том случае, когда три силы проходят через одну точку.

Объяснить условие (*) можно и геометрически. Заметим, что от выбора точки O сумма моментов, стоящая в левой части (*), не зависит, поскольку сумма сил равна 0 (это нетрудно проверить вычислением). Если три

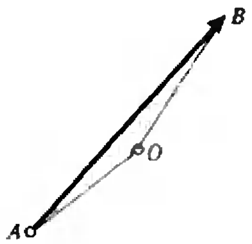


Рис. 3.

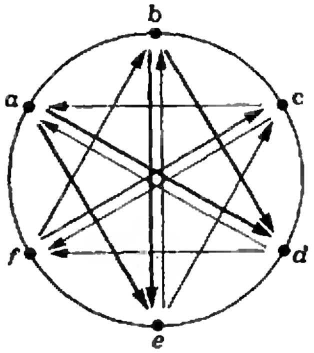


Рис. 4.

отрезка проходят через одну точку, то, взяв именно ее за точку O, мы получим, что все три члена суммы (*) равны нулю. Если же при их пересечении образуется треугольничек (как на рисунке 1), то, взяв за точку O любую точку внутри этого треугольничка, мы увидим, что все три прилегающие к отрезкам PK, QL и RM узкие треугольники OPK, OQL и ORM ориентированы одинаково, а значит, все три члена суммы (*) имеют один знак, так что сумма отлична от нуля.

Остается подставить в (*) выражения $k=(a+b)/2$, $r=(b+c)/2$, ..., $q=(f+a)/2$ и раскрыть скобки:

$$4([k,p]+[l,q]+[m,r])=[a+b,e+d]+\ldots=$$
$$=[a,e]+[a,d]+[b,e]+[b,d]+\ldots$$

Чтобы от полученных 12-ти слагаемых не рябило в глазах, мы не будем их выписывать, а вместо этого рассмотрим схему (рис. 4), на которой точками изображены векторы, а стрелками соединены те пары векторов, произведения которых (в указанном порядке!) входят в сумму. По правилу $[u,v]=-[v,u]$ три пары произведений, изображаемых противоположно идущими стрелками, уничтожаются; в итоге получаем

$$4([k,p]+[l,q]+[m,r]=$$
$$=[b,d]+[d,f]+[f,b]-([a,c]+[c,e]+[e,a])=$$
$$=2(S_{BDF}-S_{ACE}).$$

Отсюда следует утверждение задачи, а также дополнительный результат: для любого шестиугольника $ABCDEF$ удвоенная сумма площадей треугольников OPK, OQL и ORM (с учетом ориентации) равна разности площадей BDF и ACE.

Конечно, этот результат можно получить и с помощью элементарной геометрии — рассматривая многочисленные параллелограммы и треугольники, сравнивая их площади, а также с помощью метода координат; но такие решения более громоздки.

Н. Васильев, Н. Седракян

Решению задачи М1330 будет посвящена отдельная заметка в одном из следующих номеров.

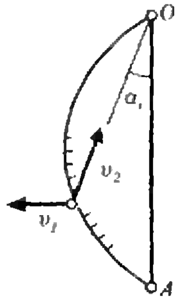
***Ф1343.** Лиса видит зайца на расстоянии $l=160$ м. Заяц бежит по прямой с постоянной скоростью $v_1=6$ м/с. Скорость лисы равна $v_2=10$ м/с и в каждый момент направлена по прямой, соединяющей лису и зайца. В начальный момент скорость зайца перпендикулярна этой прямой. Где произойдет встре-*

В таких задачах важно выбрать наиболее удобную систему отсчета. Если мы «пересядем на зайца», т. е. перейдем в систему отсчета, которая движется, например вправо, со скоростью $v_1=6$ м/с, то «точка назначения» остановится, и решать задачу будет проще.

Итак, в выбранной системе отсчета заяц покоится, а лиса движется по некоторой кривой (см. рисунок). Разобьем эту кривую на множество маленьких участков и посмотрим, что изменится за время Δt_i прохождения очередного такого участка. Расстояние от лисы до зайца (до точки O) уменьшится на

$$\Delta l_i=(v_2-v_1\sin\alpha_i)\Delta t_i.$$

ча? На сколько секунд раньше она могла бы произойти, если бы лиса была умнее?



Задачник „Кванта"

За это же время лиса удалится от прямой AO на

$$\Delta x_i=(v_1-v_2\sin\alpha_i)\Delta t_i.$$

Ясно, что лиса вначале удаляется от прямой AO, затем приближается к ней, и за время всего путешествия суммарное удаление будет равно нулю:

$$\Sigma\Delta x_i=0.$$

Запишем последнее выражение подробнее и учтем, что $\Sigma\Delta t_i=t$ — это искомое время погони:

$$\Sigma(v_1-v_2\sin\alpha_i)\Delta t_i=$$

$$=\Sigma v_1\Delta t_i-\Sigma v_2\sin\alpha_i\Delta t_i=$$

$$=v_1t-v_2\Sigma\sin\alpha_i\Delta t_i=0.$$

Отсюда можно выразить сумму произведений вида $\sin\alpha_i\Delta t_i$, которые входят в формулу для Δl_i, и найти сумму изменений расстояния от лисы до зайца:

$$\Sigma\Delta l_i=\Sigma v_2\Delta t_i-\Sigma v_1\sin\alpha_i\Delta t_i=$$

$$=v_2t-v_1^2t/v_2=t(v_2-v_1^2/v_2).$$

Но за все время пути расстояние от лисы до зайца менялось от l до 0, значит,

$$\Sigma\Delta l_i=l.$$

И теперь можно записать ответ:

$$t=\frac{l}{v_2-v_1^2/v_2}=\frac{lv_2}{v_2^2-v_1^2}=25\text{ с}.$$

За это время заяц убежит на 150 м.

Если бы лиса была умнее и бежала по прямой — «с опережением», то ей хватило бы 20 с (убедитесь в этом сами).

А. Зильберман

Ф1344. В теплоизолированном цилиндрическом сосуде под поршнем находится сильно разреженный гелий при температуре $T_0=100$ К. Поршень очень медленно отодвигают на некоторое расстояние, после чего в сосуде устанавливается температура $T_1=99$ К. Какая температура установится в сосуде, если поршень передвинуть очень быстро? Что такое «очень быстро» в этом случае? Сделайте оценку такой скорости передвижения поршня, при которой изменение температуры составит $\Delta T=0{,}5$ К.*

Скорости молекул при ударе об удаляющийся поршень уменьшаются. Если скорость поршня u, а молекула догоняет поршень со скоростью v_x, то после абсолютно упругого удара ее скорость будет $v_x^*=v_x-2u$. Потеря энергии молекулы составит

$$\Delta w=\frac{mv_x^2}{2}-\frac{mv_x^{*2}}{2}=2mu(v_x-u).$$

Оценим обычным способом число ударов за малый промежуток времени Δt, считая $u\ll v_x$:

$$N=\frac{1}{2}nSv_x\Delta t,$$

где n — концентрация молекул, S — площадь поршня. Тогда потеря энергии всех столкнувшихся с поршнем молекул будет

$$\Delta W=N\Delta w=\frac{1}{2}nSv_x\Delta t\cdot 2mu(v_x-u)\approx$$

$$\approx nmv_x^2Su\Delta t=nmv_x^2\Delta V,$$

где ΔV — изменение объема цилиндра.

Это соответствует обычному адиабатическому расширению. Если поршень движется быстрее, число ударов уменьшается и потери энергии становятся меньше. В пределе при $u \gg v_x$, т. е. когда поршень перемещают очень быстро, температура газа вообще не уменьшается (происходит так называемое расширение идеального газа в пустоту — без ударов о поршень). Мы сделаем довольно грубую оценку — при аккуратном расчете пришлось бы «честно» учитывать распределение молекул по скоростям — и получим

$$N' = \frac{1}{2} nS(v_x - u)\Delta t,$$

$$\Delta W' = N'\Delta w = \frac{1}{2} nS(v_x - u)\Delta t \cdot 2mu(v_x - u) = nm(v_x - u)^2 \Delta V.$$

Мы видим, что в этом случае нужно брать среднее значение не от v_x^2, а от $(v_x - u)^2$. Эта величина по условию должна быть в 2 раза меньше $(\Delta T = {}^1/_2(T_0 - T_1))$, т. е.

$$\overline{(v_x - u)^2} = \frac{1}{2}\overline{v_x^2}, \text{ или } u \approx 0{,}3|v_{x\,\text{ср}}|.$$

Для оценки $v_{x\text{ср}}$ примем

$$|v_{x\,\text{ср}}| \approx \sqrt{\overline{v_x^2}} = \sqrt{RT_0/\text{M}},$$

где R — универсальная газовая постоянная, М — молярная масса гелия. Тогда

$$u \approx 0{,}3\sqrt{RT_0/\text{M}} \approx 140 \text{ м/с}.$$

Более аккуратная оценка $|v_{x\,\text{ср}}|$ не имеет особого смысла — при расчете числа ударов о поршень мы не были особенно точны.

А. Зильберман

Ф1345. *На расстоянии $d=10$ см от точечного заряда находится равномерно заряженная квадратная пластинка размером 20×20 см, как показано на рисунке 1 (заряд расположен на продолжении нормали к центру пластинки). Во сколько раз изменится сила взаимодействия между пластинкой и зарядом, если расстояние d увеличить в 100 раз?*

Для расчета силы электрического взаимодействия между пластинкой и зарядом придется записать сумму элементарных сил взаимодействия между зарядом и элементарным участком пластинки (рис. 2):

$$F = \Sigma \Delta F_i = \Sigma \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{Q\sigma\Delta S_i \cos\alpha_i}{r_i^2},$$

где σ — поверхностная плотность заряда. Рассчитывать эту сумму «в лоб» — занятие довольно утомительное, однако задачу можно сильно упростить.

Заметим, что похожая сумма появится при расчете потока вектора напряженности электрического поля от заряда Q через поверхность:

$$\Phi = \Sigma \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{Q\Delta S_i \cos\alpha_i}{r_i^2}.$$

(Эта красивая идея подробно обсуждается в задаче 6.1.19 Сборника задач по физике под редакцией

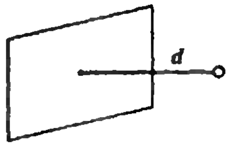


Рис. 1.

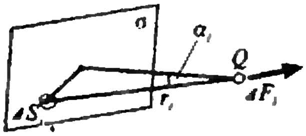


Рис. 2.

О. Савченко, 2-е издание). Можно сказать, что наш заряд находится в центре куба, одна из граней которого и есть наша заряженная пластинка; значит,

$$\Phi=\frac{1}{6}\Phi_{\text{полн}}=\frac{1}{6}\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}4\pi r^2=\frac{1}{6}\frac{Q}{\varepsilon_0}.$$

Тогда вначале

$$F_1=\frac{1}{6}\frac{Q\sigma}{\varepsilon_0}.$$

При увеличении расстояния d в 100 раз можно считать, что заряд поверхности сосредоточен в точке, поэтому

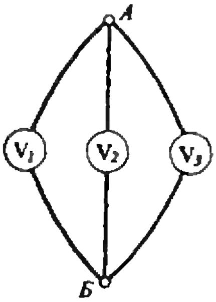
$$F_2=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q\sigma(2d)^2}{(100d)^2}=\frac{Q\sigma}{10^4\pi\varepsilon_0}.$$

И окончательно:

$$\frac{F_1}{F_2}=\frac{10^4\pi}{6}\approx 5\cdot 10^3.$$

Д. Александров

Ф1346. *Три одинаковых вольтметра подключены длинными проводами к точкам А и Б, как показано на рисунке. Система находится в медленно изменяющемся магнитном поле. В некоторый момент показания крайних вольтметров составляют $U_1=0{,}35$ В и $U_3=0{,}1$ В. Что показывает средний вольтметр в это время?*



Решение этой задачи совсем простое. Если магнитное поле изменяют так, что показания двух приборов неизменны (т. е. по каждому из них течет неизменный ток), то третий прибор должен показать либо сумму, либо разность показаний первых двух:

$$U_2=U_1+U_3=0{,}45\ \text{В}\quad\text{либо}\quad U_2=U_1-U_3=0{,}25\ \text{В}.$$

В самом деле — сумма (алгебраическая) токов в узле должна быть равной нулю, а сопротивления вольтметров по условию одинаковы. Поскольку полярность подключения приборов (т. е. направления токов через них) нам не известна, ничего более определенного сказать нельзя.

И еще одно замечание. Обычные приборы могут оказаться весьма чувствительны к внешним магнитным полям — мы тут не учитываем прямого воздействия внешнего магнитного поля на рамку с током.

Д. Александров

Ф1347. *Тонкая сферическая линза из стекла имеет толщину $d=3$ мм и диаметр $D=4$ см. Линзу плашмя положили на по-*

При расчете геометрии линзы мы воспользуемся тем, что она тонкая, и получим соотношение

$$\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}=\frac{8d}{D^2}.$$

верхность воды, наполовину погрузив в нее. При этом изображение Солнца, стоящего в зените, оказалось на глубине $h_1 = 17{,}5$ см. Когда линзу «притопили» другой стороной, получили $h_2 = 13{,}5$ см. Чему равны радиусы кривизны поверхностей линзы? Коэффициент преломления воды $n = 1{,}33$.

Задачник «Кванта»

Для расчета оптических свойств линзы мы будем считать ее составленной из двух плосковыпуклых полулинз. Воспользуемся тем, что оптическая сила системы тонких линз, расположенных вплотную друг к другу, равна сумме оптических сил составляющих. Тогда в первом случае можно записать

$$\frac{1}{F_1} = \frac{n_{ст}-1}{R_1} + \frac{n_{ст}/n_в - 1}{R_2} = \frac{1}{h_1}, \qquad (2)$$

где $1/F_1$ — оптическая сила системы, $n_{ст}$ — коэффициент преломления стекла, $n_в = n$ — коэффициент преломления воды. Аналогично, во втором случае —

$$\frac{1}{F_2} = \frac{n_{ст}-1}{R_2} + \frac{n_{ст}/n_в - 1}{-R_1} = \frac{1}{h_2}.$$

Суммируя уравнения (2) и (3) и используя соотношение (1), найдем $n_{ст}$:

$$\frac{8d}{D^2}(n_{ст} + n_{ст}/n_в - 2) = \frac{1}{h_1} + \frac{1}{h_2} \Rightarrow n_{ст} \approx 1{,}64.$$

Вычитая из уравнения (2) уравнение (3), получим

$$\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} = \frac{1/h_1 - 1/h_2}{0{,}25 n_{ст}}.$$

Окончательно найдем

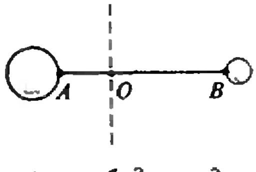
$$R_1 \approx 10{,}5 \text{ см}, \quad R_2 \approx 18{,}5 \text{ см}.$$

А. Зильберман

Нам пишут

В восьмом номере «Кванта» за 1990 год в рубрике «Калейдоскоп «Кванта» была помещена задача следующего содержания:

Два шарика массами 9 грамм и 3 грамма соединены нитью и вращаются в горизонтальной плоскости с постоянной угловой скоростью. При каком соотношении длин нитей AO и OB (см. рисунок) их



натяжение будет одинаковым?

В следующем номере был дан ответ:

$AO : OB = 1 : 3$. Натяжения нитей одинаковы, если центр вращения совпадает с центром масс системы.

Ответ этот верен только в том случае, если радиусы шаров пренебрежимо малы по сравнению с длиной нити. А как у нас?

Во-первых, в условии об этом ничего не сказано, а во-вторых, рисунок-иллюстрация к задаче как раз показывает, что радиусами пренебрегать нельзя. В этом можно убедиться, если считать, что рисунок выполнен строго в масштабе (наподобие фотографии).

Измерив необходимые размеры (в «Кванте» № 8—90), находим, что расстояние AB равно 21 мм, а диаметры шаров равны 7 мм и 3 мм. Отсюда сразу следует, что шары изготовлены из разных материалов (иначе отношение диаметров равнялось бы $\sqrt[3]{3} \approx 1{,}44$), но это не помешает. Если точка O — центр масс системы, то должно выполняться соотношение $A_1O : OB_1 = 1 : 3$, где A_1 и B_1 — центры соответствующих шаров. Тогда получаем

$$A_1B_1 = (21 + 7/2 + 3/2) \text{ мм} = 26 \text{ мм},$$

$$A_1O = 26\,(1/4) \text{ мм} = 6{,}5 \text{ мм},$$

$$OB_1 = 26\,(3/4) \text{ мм} = 19{,}5 \text{ мм},$$

$$AO = (6{,}5 - 7/2) \text{ мм} = 3 \text{ мм},$$

$$OB = (19{,}5 - 3/2) \text{ мм} = 18 \text{ мм},$$

откуда

$$AO : OB = 1 : 6.$$

А это значительно отличается от данного в журнале ответа $1 : 3$. Расхождение немалое!

И. Акулич

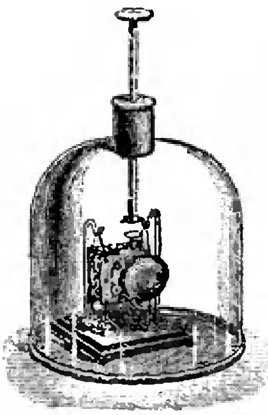
Калейдоскоп „Кванта"

...теория звука, в обычном ее понимании, охватывает ту же область, что и теория колебаний вообще... Мы, как правило, будем ограничиваться теми классами колебаний, для которых наши уши оказываются готовым и чувствительным инструментом исследования. Не обладая слухом, мы едва ли много больше интересовались бы колебаниями, чем глаз — светом.

Дж. У. Рэлей

А так ли хорошо знаком вам

Звук
?



Физика звука — одна из самых «живых» областей физики. Достаточно сказать, что в акустике (наряду с оптикой) человек долгое время чувствовал себя самым совершенным «прибором». Но постепенно открылось, что мир наполнен и неслышимыми звуками, недоступными нашему уху. И только внимательно наблюдая за живой природой, «оснащенной» заметно богаче нас акустическими средствами, воспроизводя их и создавая новые, искусственные, мы необыкновенно расширили палитру звуков, поставив их себе на службу. Архитектура, музыка, медицина, техника — вот некоторые сферы использования современных знаний о звуке. Примеры — в сегодняшнем выпуске «Калейдоскопа».

Вопросы и задачи

1. Звук артиллерийского выстрела дошел до первого наблюдателя через 3 секунды, а до второго — через 4,5 секунды после вспышки. Определите графически местоположение орудия, если расстояние между наблюдателями 1 километр.

2. Известно, что если источник звука и человек находятся примерно на одной высоте, то в направлении ветра звук слышен дальше, чем в противоположном. Как это можно объяснить?

3. Почему ветер воет?

4. Продольными или поперечными являются волны, возбуждаемые смычком?

5. Давление воздуха в баллоне колеса автомашины можно оценить по звуку, получаемому при ударе по баллону металлическим предметом. Как это можно сделать?

6. Почему у банджо звенящий звук, а у арфы — мягкий, певучий?

7. Громкость звука убывает обратно пропорционально квадрату расстояния от источника. Ученик, сидящий в пятом ряду, находится примерно втрое дальше от учителя, чем сидящий в первом ряду, однако условия слышимости в обоих случаях мало отличаются друг от друга. Почему?

8. Какой камертон звучит дольше: закрепленный в тисках или стоящий на резонансном ящике?

9. Звукопоглощаемость стекла значительно меньше звукопоглощаемости воздуха, однако, закрывая окно, мы значительно ослабляем слышимость уличного шума (а наличие двойных рам почти полностью прекращает его доступ в комнату). Чем это можно объяснить?

10. Почему после снегопада становится так тихо?

11. Почему неполный чайник перед закипанием воды «шумит» сильнее, чем полный?

12. В окнах, под которыми проезжают автомашины, нередко назойливо дребезжат стекла. Это неприятное явление можно значительно ослабить, если в центре стекла прикрепить кусочек пластилина. Как объяснить этот эффект?

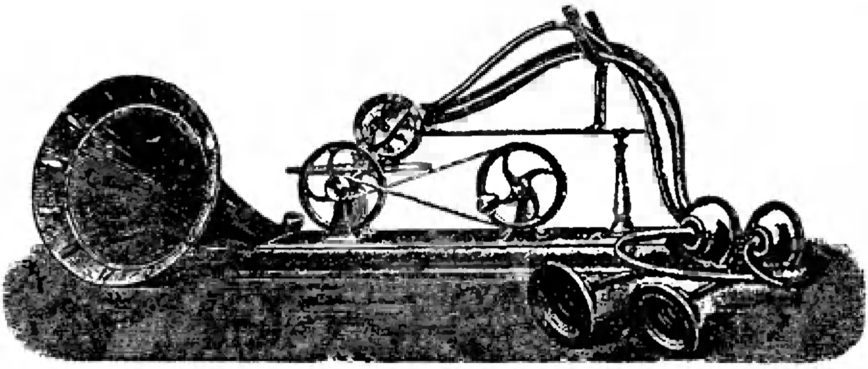
13. Оперный певец способен разбить большой винный бокал, спев очень громко определенную высокую ноту в течение нескольких секунд. Почему?

14. Почему возникает звук, когда щелкают бичом?

15. Почему при выстреле из ружья пуля вылетает со свистом, а брошенная рукой летит бесшумно?

16. Какую форму имеет фронт ударной волны, возникающей в воздухе при полете сверхзвукового реактивного самолета?

17. Почему дверь, лишь чуть-чуть приоткрытая в шумный коридор, практически не уменьшает шума?



Микроопыт

Если вы подуете около отверстия ключа, получится звук определенной частоты. Попробуйте оценить ее.

Любопытно, что...

...на Руси еще в X веке проводилась «акустическая обработка» внутренностей церквей и храмов. Для этого в их стены и своды закладывались специальные глиняные сосуды — голосники, служащие резонаторами звуков.

...система звуковых сигналов у некоторых африканских племен была разработана так хорошо, что их можно было считать обладателями телеграфа, причем более совершенного, чем оптический телеграф европейцев, предшествовавший электрическому. Так, сообщение о гибели «Лузитании» — «Большой корабль белых людей потонул, много белых погибло» — прогремело на барабанном языке через все земли от Каира до Ибадана.

...в замке Вудсток, в Англии, эхо отчетливо повторяет 17 слогов. А в замке близ Милана — в еще одном «царстве эха» — громко сказанное слово повторяется эхом 30 раз!

...частотный диапазон человеческого голоса намного уже диапазона человеческого слуха (20—20 000 герц). Так, самые высокие ноты, до которых «добираются» современные певицы, соответствуют частотам около 2350 герц, а рекорд в области низких частот составляет 44 герца.

...энергия, которую обычно переносят звуковые волны, очень мала. Если бы стакан с водой полностью поглощал всю падающую на него звуковую энергию, соответствующую громкости в 70 децибел (уровень громкой речи), и был бы полностью теплоизолирован от окружающей среды, то для того, чтобы нагреть воду от комнатной температуры до кипения, потребовалось бы примерно тридцать тысяч лет.

...секрет ультразвукового «разглядывания» дельфинами удаленных предметов — в узкой направленности акустических сигналов. Например, черноморские афалины способны безошибочно подплывать к дробинке диаметром 4 миллиметра, брошенной в море на растоянии 20—30 метров от животного.

...одно из многочисленных применений ультразвука в медицине основано на возможности его концентрации на чрезвычайно ограниченных участках ткани без влияния на весь остальной организм.

Что читать в «Кванте» о звуке

(публикации последних лет)

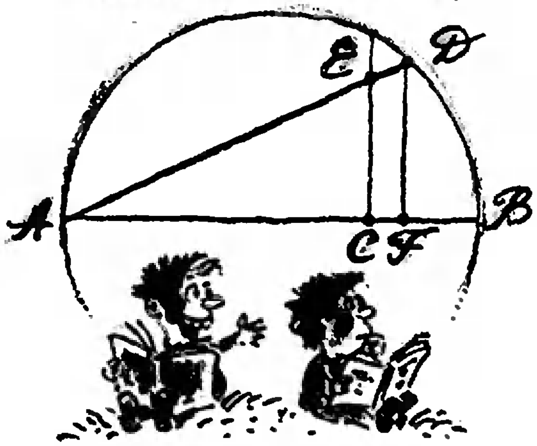
1. «Акустика в Океане» — 1987, № 3, с. 8;
2. «Физика музыкальной гармонии» — 1987, № 5, с. 41;
3. «Музыкальные пульсары» — 1988, № 6, с. 11;
4. «Глобальные резонансы» — 1989, № 2, с. 16;
5. «В мире мощного звука» — 1989, № 9, с. 18;
6. «Ультразвук в медицине» — 1990, № 9, с. 17;
7. «Об интерференции, дельфинах и летучих мышах» — 1991, № 5, с. 18;
8. «О водяном звере и акустическом резонансе» — 1991, № 7, с. 8.

Материал подготовил А. Леонович

Задачи

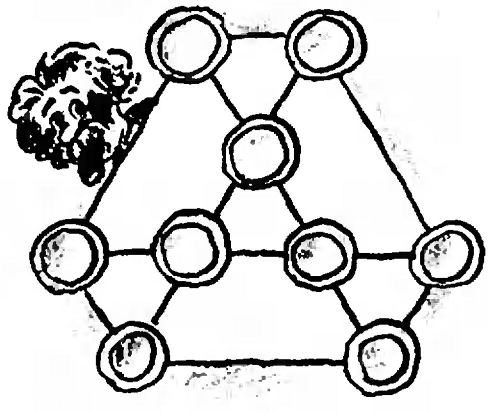
1. Мужичок привез продавать на рынок фуки, глюки и друки. Пройдясь по рынку, он решил увеличить запланированные им цены, добавив еще по одному нулю, но не в концы, а в середины чисел. В результате цена за один фук увеличилась в 6 раз, за глюк — в 7 раз, а за друк — в 9 раз. Сколько они стали стоить, если первоначальная цена каждого из них была меньше 100 рублей?

2. Перед началом международного шахматного турнира в городе Нью-Москва (б. Васюки) туда была проведена железная дорога из города Старые Васюки (б. Москва) длиной 1993 км. На первом километровом столбе этой дороги написаны числа 1 и 1992, на втором — 2 и 1991, на третьем — 3 и 1990 и т. д. Докажите, что числа на каждом из этих столбов всегда взаимно простые.



3. Диаметр AB окружности равен 1. На нем отложен отрезок AC длиной a. Проведена также хорда AD длиной b. Из точки C восстановлен перпендикуляр к AB, пересекающий хорду AD в точке E, а из точки D опущен перпендикуляр DF на AB (см. рисунок). Оказалось, что $AE = AF$. Докажите, что $a = b^3$.

4. Витя и его младший брат Митя купили по книге. Каждый из них подсчитал сумму цифр всех страниц книги и выяснил, что она равна году его рождения. Как зовут того из братьев, который ходит учиться в школу с математическим уклоном?



5. Расставьте в кружках на рисунке цифры 1, 2, 3,...,9 так, чтобы суммы чисел в вершинах каждого из семи равносторонних треугольников были равны.

Эти задачи нам предложили Н. Антонович, Н. Авилов, В. Касаткин, И. Акулич, а последняя задача принадлежит Альберту Эйнштейну.

ЗАДАЧИ СТАРИКА ХОТТАБЫЧА

Кандидат физико-математических наук
В. СУРДИН

Вероятно, многие из вас читали сказочную повесть Л. Лагина «Старик Хоттабыч» или хотя бы видели фильм о приключениях старого джинна и его юных друзей — Вольки и Жени. Но многие ли помнят что Волька Костыльков был большим любителем астрономии, действительным членом астрономического кружка при Московском планетарии и даже его старостой? Наверное, именно поэтому в повести немало эпизодов, заставляющих задуматься каждого юного любителя астрономии (а заодно и физики). Вот некоторые из них. Вчитайтесь в текст повести и подумайте над поставленными вопросами, но не торопитесь заглядывать в ответ.

1. Наручные солнечные часы. Помните, каким был первый подарок Хоттабыча Вольке? Это были наручные часы. Сначала — из цельного куска золота и без всякого механизма внутри. Они, разумеется, не показывали время.

«— А разве там что-то должно быть, внутри? — забеспокоился старый джинн. Вместо ответа Волька молча отстегнул часы и вернул их Хоттабычу.

— Хорошо,— кротко согласился тот.— Я тебе подарю такие часы, которые не должны иметь ничего внутри.

Золотые часики снова оказались на Волькиной руке, но сейчас они стали тоненькими, плоскими. Стекло на них исчезло, а вместо минутной, секундной и часовой стрелок возник небольшой вертикальный золотой шпенечек в середине циферблата с великолепными, чистейшей воды изумрудами, расположенными там, где полагалось быть часовым отметкам.

— Никогда и ни у кого, даже у богатейших султанов вселенной не было наручных солнечных часов! — снова расхвастался старик.— Были солнечные часы на городских площадях, были на рынках, в садах, во дворцах, и все они сооружались из камня. А вот такие я только что сам придумал. Правда, неплохо?

Действительно, оказаться первым и единственным во всем мире обладателем наручных солнечных часов было довольно заманчиво.»

Итак, можно ли сделать наручные солнечные часы? Если да, то почему же таких часов не было даже у султанов?

2. Морской бинокль. «Благословенный Волька,— сказал после завтрака Хоттабыч, блаженно греясь на солнышке,— все время я делаю тебе подарки, по моему разумению ценные, и каждый раз они тебе оказываются не по сердцу. Может быть, сделаем так: ты мне сам скажешь, что тебе... угодно было бы от меня получить в дар, и я почел бы за счастье... немедленно доставить желаемое.

— Подари мне, в таком случае, большой морской бинокль,— ответил Волька не задумываясь.»

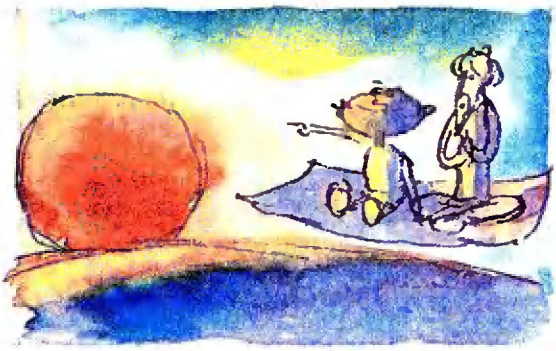
Почему Волька выбрал себе именно такой подарок?

3. Ковер-самолет. Волька и Хоттабыч отправились на ковре-самолете выручать Женю из рабства.

«Вечерняя темнота окутала город, а здесь, наверху, еще виден был багровый солнечный диск, медленно оседавший за горизонт.

— Интересно... — промолвил Волька задумчиво,— интересно, на какой мы сейчас высоте?

— Локтей шестьсот-семьсот,— отвечал Хоттабыч, продолжая что-то высчитывать на пальцах.»



Правильно ли Хоттабыч определил высоту полета? Напомним, что локоть составляет около полуметра.

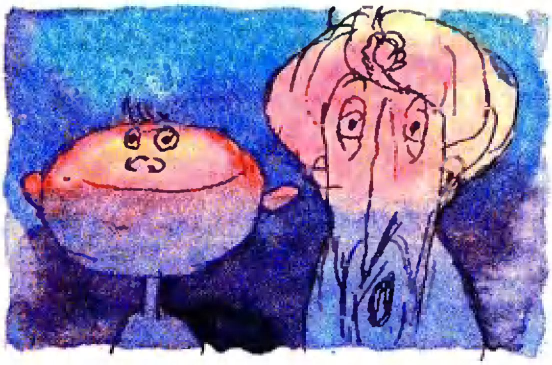
4. Продолжение полета. «Стемнело. Теперь на ковре-самолете стало особенно неуютно, и Волька предложил Хоттабычу подняться локтей на пятьсот выше.

— Тогда мы снова увидим солнце.

Хоттабыч глубоко сомневался, можно ли до завтрашнего утра увидеть уже закатившееся дневное светило, но спорить с Волькой не стал.

Можете себе представить, как он удивился и насколько вырос в его глазах Волькин авторитет, когда, поднявшись повыше, они действительно снова увидели солнце, которое как ни в чем не бывало снова только-только касалось своим багровым краем черной линии далекого горизонта.

— Если бы, подчиняясь твоей скромности, о Волька, не дал я тебе обещания, ничто не удержало бы меня от того, чтобы назвать тебя величайшей в мире балдой! — восхищенно произнес Хоттабыч...»



Верно ли Волька рассчитал необходимую высоту и действительно ли он достоин звания «величайшей в мире балды»?

5. Полет на Луну. Вы помните, как сварливый брат Хоттабыча Омар Юсуф решил слетать на Луну? Волька предупредил его:

«— Ты должен вылететь с земли со скоростью не меньше, чем одиннадцать километров в секунду. В противном случае, ты, уверяю тебя, никогда не доберешься до луны.

— С радостью и удовольствием! — Омар Юсуф поджал свои тонкие губы.

— А сколь велик километр? Скажи, ибо я не знаю такой меры длины.

— Ну, как тебе объяснить... — призадумался Волька.— Ну вот: километр — это примерно тысяча четыреста шагов.

— Твоих шагов? — спросил джинн.— Значит, моих шагов в километре не больше тысячи двухсот, даже немного меньше.

Омар Юсуф был преувеличенного мнения о своем росте. Он был не выше Вольки».

С какой скоростью джинн вылетел с Земли?

6. Хоттабыч в космосе. Помните, как старик Хоттабыч описывал свой полет в космосе? Сначала он превратился в спутник Земли, чтобы встретиться на орбите со своим братом. «А потом, когда я увидел, что мне пора возвращаться на землю, я обратился лицом в ее сторону и придал своему телу как раз такую скорость, какая требовалась для преодоления силы, которая вращала меня вокруг земного шара.»

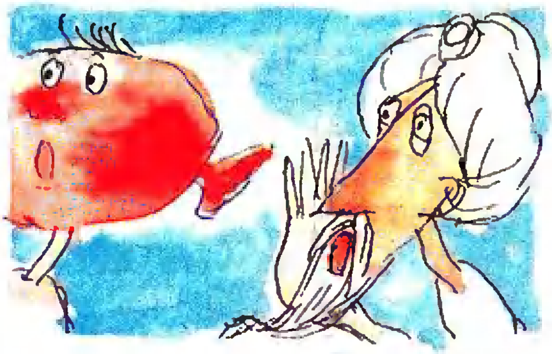
Описание этого космического маневра можно понять так, что Хот-

табыч двигался по круговой орбите, а затем сообщил себе добавочную скорость, равную первой космической и направленную к центру Земли.

Мог ли Хоттабыч после такого маневра вернуться на Землю?

7. Экзамен по географии. Собираясь подсказывать Вольке на экзамене по географии, джинн обещал: «Никто моей подсказки не заметит... То, что я буду иметь счастье подсказывать, пойдет прямо из моих почтительных уст в твои высокочтимые уши».

Почему для направленной передачи звука нужны были магические способности Хоттабыча, тогда как направленную передачу света может осуществить любой из нас, например с помощью карманного фонарика?



8. Волшебная борода. Как вы помните, борода Хоттабыча теряла свою волшебную силу, когда намокала. Юные любители науки решили помочь джинну:

«— Придумал! — возбужденно вскочил на ноги Женя.— Ей-богу, придумал!.. Нужно смазать бороду каким-нибудь жиром.

— Ну и что тогда? — пожал плечами старик.

— Тогда она не промокнет даже под водопадом, вот что тогда!..

— Я достаточно сведущ в науках,— обиделся Хоттабыч,— но не знаю, какая это наука учит смазкой предохранять от порчи волшебную бороду».

Объясните старому джинну, почему смазанная жиром борода не промокает.

Новости науки

Перетягивание каната

Каждый, по всей видимости, знает, что наши мышцы состоят из мышечных волокон, те, в свою очередь,— из более тонких миофибрилл («мышечное волоконце»), а они — из нитей актина («действующий») и миозина («мышечный») — белков, которые, как оказывается, несут ответственность за все мышечные сокращения.

Даже под обычным оптическим микроскопом видно, что мышечные волокна наших бицепсов и трицепсов выглядят как бы исчерченными поперечными — к длине мышцы — полосками. Вот почему наша скелетная мускулатура получила название поперечно-полосатой. Полоски эти, как разглядели под электронным микроскопом, состоят из толстых молекул миозина, каждая из которых состоит приблизительно из 4600 молекул аминокислот — тех «кирпичиков», из которых построены все белки.

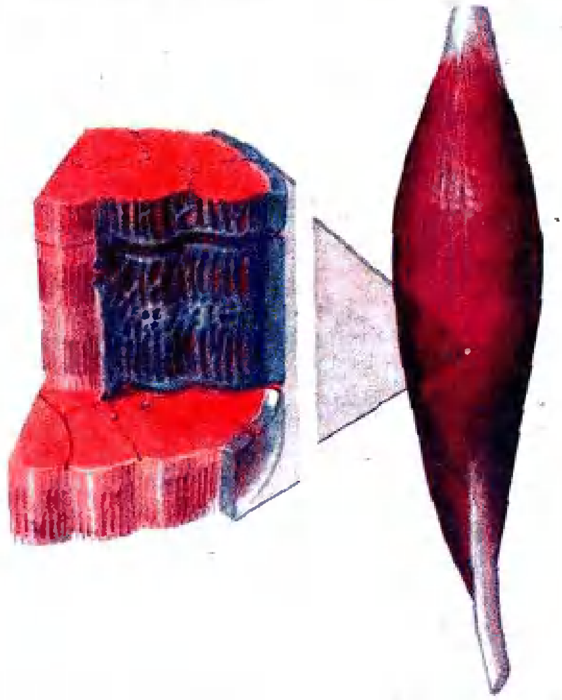
Отдельные миозиновые молекулы похожи на двуглавых змей с размером каждой головки примерно 20 нанометров. С помощью этих головок миозин заставляет актиновые нити скользить вдоль него самого, причем на довольно большие расстояния, в результате чего и происходит мышечное сокращение. Действие головок миозина можно сравнить с действием лопастей мельничного колеса либо плиц колесных пароходов, когда-то ходивших по Волге да и поныне «шлепающих» по Миссисипи (именно на таком пароходе путешествовали Том Сойер и Гекльберри Финн).

Мельничное колесо крутится за счет кинетической энергии падающей воды. Пароход движется за счет тепла, образующегося при сжигании дров или угля в топке. А за счет какой же энергии происходит сокращение наших мышц?

Оказывается, внутренним источником энергии наших клеток является так называемая аденозинтрифосфорная кислота (АТФ), открытая в 20-х годах нашего столетия. Несколько позже было обнаружено, что энергия, необходимая для мышечных сокращений и других процессов жизнедеятельности, освобождается при расщеплении, или гидролизе, АТФ. Поясним, в чем тут дело.

Молекула АТФ имеет «хвост», составленный из трех последовательно соединенных друг с другом остатков фосфорной кислоты. При отщеплении концевого фосфата, которое происходит с участием молекулы воды (отсюда и название реакции — «гидролиз»), выделяется энергия.

«АТФ — центральная ось, вокруг которой развертывается мое изложение»,— писал один из основоположников молекулярной биологии в нашей стране академик В. А. Энгельгардт, открывший, что именно миозин осуществляет гидролиз АТФ. Так возникло учение о механобелках, которые способны



Справа: внешний вид бицепса — поперечно-полосатой мышцы внутренней поверхности руки. Слева: так выглядит мышечное волокно под электронным микроскопом. Толстые нити — миозин, тонкие нити — актин, поперечные полосы — «диски», к которым прикрепляются белковые нити.

совершать механическую работу за счет энергии расщепления молекул. К этому можно добавить, что сам миозин был открыт в конце прошлого века русским микробиологом Г. Н. Габричевским.

Большой вклад в изучение мышечного сокращения внес известный американский биохимик А. Сент-Дьёрдьи, нобелевский лауреат 1937 года. Так случилось, что сначала он бежал из Будапешта от немцев, а потом — в 1948 году — от русских, оказался в Нью-Йорке, где сумел убедить мясопромышленников в том, что изучение мышцы поможет им сохранять мясо. Именно Сент-Дьёрдьи установил, что «челюсти», отгрызающие у АТФ концевой фосфат, находятся в головках миозина.

И вот недавно новый успех в мире биомеханики. Японские и американские ученые создали молекулярные системы для определения сил в пиконьютоновом диапазоне.

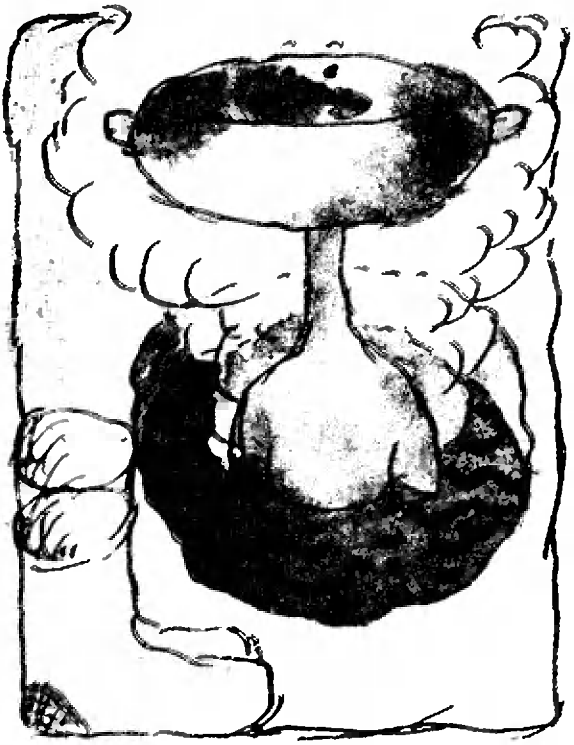
Ученые Осакского университета (Япония) «протягивали» нить актина длиной в несколько десятков микрон, прикрепленную к тончайшей (диаметром 0,3 мкм) стеклянной микроигле размером 50—100 мкм, по поверхности, образованной молекулами миозина (оба белка были получены из скелетной мышцы кролика). Среда содержала различные ферменты и АТФ. Регистрацию осуществляли с помощью высокочувствительной аппаратуры, которая реагировала на светимость окрашенного флюоресцентным красителем актина и блеск крупинки никеля (диаметром 2 мкм), укрепленной на кончике иглы. С помощью компьютера передвижение нити актина было «выведено» на телевизионный экран.

В этих опытах нить актина перемещалась по поверхности миозиновых молекул на расстояния до 100 нм и более. Механическое усилие, создаваемое одной головкой миозина, равнялось 0,15—0,18 пН. На 1 мкм длины актина приходилось 150 головок миозина. В покое каждая головка расщепляла около 6 молекул АТФ за секунду. При движении актиновой нити скорость гидролиза повышалась примерно до 30 мол/с. Заметим, что одной молекулы АТФ хватает, чтобы «протянуть» нить актина на расстояние 60—200 нм со скоростью порядка 1 мкм/с.

С японскими учеными не во всем согласны специалисты Стэнфордского университета (США), которые считают, что головка миозина «перетягивает» нить актина не все время расщепления АТФ, а лишь небольшую его часть — не более 5 %. Т. е. сходство скорее не с перетягиванием каната, а с зацеплением зубьев шестеренки.

Квантовая биомеханика действительно начинает жить!

И. Лалаянц



Лаборатория „Кванта"

«Тепловые фантазии и прочие удовольствия»

Предлагаемые вашему вниманию задачи-вопросы взяты из одноименной главы книги американского физика Дж. Уокера «Физический фейерверк», выдержавшей уже два издания на русском языке. Почти все задачи так или иначе связаны с окружающим нас миром, а ответы к ним, как правило, лишь уточняют задачу или подсказывают путь к ее решению. Итак, наблюдайте и экспериментируйте.

1. Что удерживает облако? Почему облако не «рассыпается»? Почему в малооблачную погоду часть неба закрыта облаками, а часть — совершенно чистая? Не кажется ли вам, что облака должны были бы распределяться по небесному своду более равномерно?

2. Влажность и прохлада. Почему, выходя из-под душа или из бассейна, вы ощущаете прохладу? Попробуйте оценить скорость потери тепла в этих случаях. (Для оценки эффекта охлаждения при ветре в настоящее время иногда используют так называемый фактор ветроохлаждения.)

Почему больных, чтобы облегчить им боль, порой растирают метиловым спиртом? Почему для этой цели не применяют просто воду?

Когда я был маленьким и ездил с родителями отдыхать, обычно на переднее крыло машины мы прикрепляли холщовую сумку с водой. Как бы жарко ни было, вода в сумке оставалась прохладной. Почему? Можете ли вы рассчитать ее температуру при заданных температуре воздуха, влажности и скорости автомобиля?

3. Испытание кипящей водой. Один из самых удивительных примеров искусства восточной магии — испытание кипящей водой, которому подвергались последователи японской религии Синто.

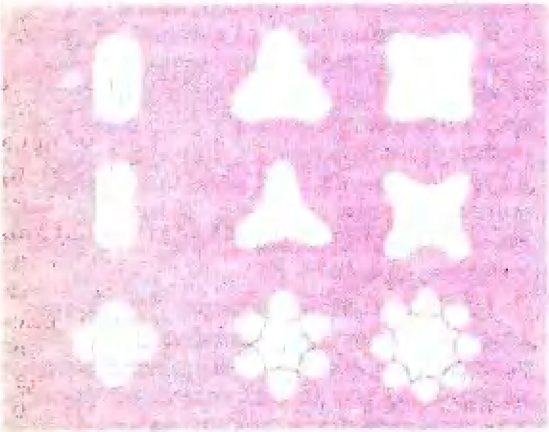
Участник действа подходил к огромному котлу с кипящей водой, резким движением погружал в него две связки бамбуковых прутьев и, взметнув их вверх, осыпал себя горячим дождем. Вода попадала в огонь под котлом, и вокруг клубились облака пара — так продолжалось пока котел не пустел. Тогда облака рассеивались, и все видели человека целого и невредимого; это служило подтверждением всемогущества Синто.

Кипящая вода, несомненно, должна была сжечь кожу человека, так что здесь наверняка скрывался какой-то фокус. Конечно, вам не стоит проделывать этот трюк. Однако попытайтесь ответить на вопрос: помогло ли бы человеку, если бы это жестокое испытание началось в тот момент, когда вода только-только закипала? Какова в это время температура воды?

4. Капли, пляшущие на горячей сковородке. Если брызнуть водой на горячую сухую сковородку, то на ней начнут прыгать и плясать капли. Почему вода не испаряется сразу? Почему капли движутся? Как это ни удивительно, но капли испаряются быстрее, если сковородка менее горячая. Почему?

Рассмотрите внимательно прыгающую каплю и вы заметите, что она принимает самые разнообразные формы. В действительности капля вибрирует, но глаз не в состоянии уследить за столь быстрым движением, поэтому вы видите какую-то усредненную форму. Чтобы увидеть отдельное состояние капли, придется пользоваться стробоскопом или применять скоростную киносъемку. Почему капли вибрируют?

5. Гейзеры. Что вызывает извержения гейзеров? Почему некоторые гейзеры, как например Верный служака, извергаются через строго определенные промежутки времени? Может ли источником тепла для гейзера служить простая теплопередача через окружающие породы или здесь требуется более быстрый нагрев?



Формы капель на горячей поверхности.

Искусственный гейзер.

Предположим, вы хотите сделать искусственный гейзер с постоянным источником тепла. Какой длины должна быть трубка и какой мощности требуется нагреватель? С какой частотой и на какую высоту будет извергаться такой гейзер?

6. Почему вам холодно? Почему вам будет холодно, если вы холодным зимним днем выйдете в поле раздетым? Каким образом тело теряет тепло: путем теплопроводности или как-то иначе? Почему вам тепло в шубе? Ведь шуба тоже проводит тепло.

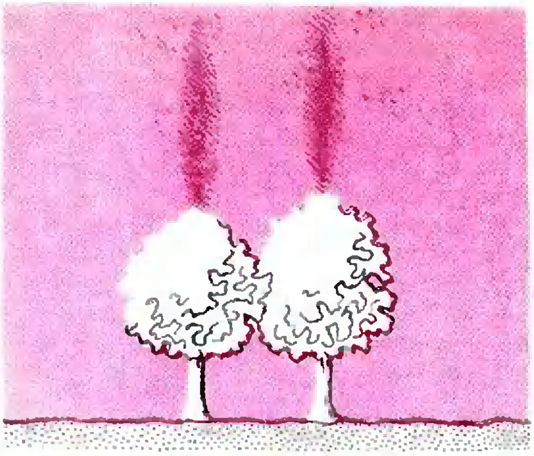
В холодный день, находясь в помещении, постойте некоторое время лицом к окну, а потом отвернитесь от него. Скорее всего, вы ощущали прохладу на лице, когда оно было обращено к окну. Почему? В конце концов, температура воздуха не изменилась, когда вы отвернулись от окна.

В фильме «Космическая одиссея: 2001» астронавт выходит на несколько секунд в открытый космос без защитного скафандра. (Артур Кларк, автор одноименного романа, считает, что это возможно без особого вреда для астронавта.) Будет ли у человека ощущение холода при такой прогулке в космосе?

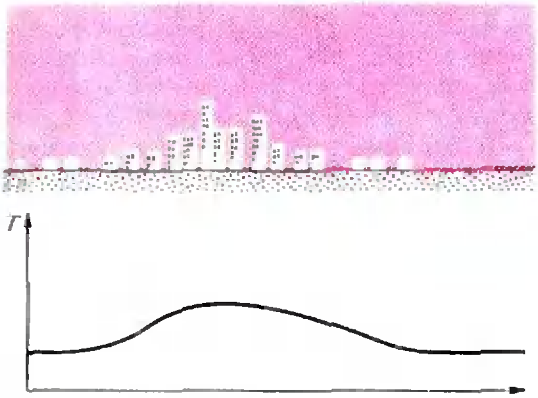
Каким образом некоторые люди приспосабливаются работать на сильном холоде? Некоторые религиозные фанатики, чтобы доказать стойкость своего духа, даже предпочитают противоестественно холодные условия существования. Уникальный пример приспособленности к холоду обнаружил Чарлз Дарвин у индейцев племени Яган в Южной Америке: при температуре, близкой к 0 °С, они едва прикрывают плечи меховой накидкой. Какие физические изменения должны происходить в организме, чтобы подобная адаптация к холоду стала возможной?

Почему, наконец, вы дрожите, когда вам холодно?

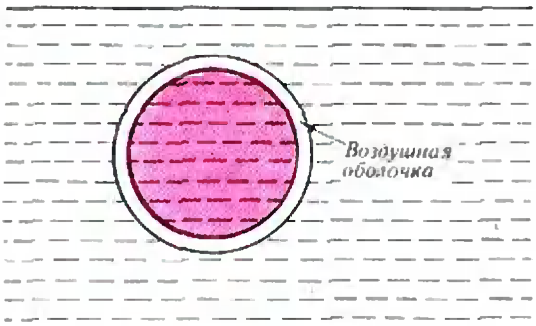
7. Рои насекомых над деревьями. Часто незадолго до захода солнца над вершинами деревьев можно видеть темные облачка. Они похожи на дым, однако при ближайшем рассмотрении оказывается, что это плотные рои на-



Насекомые и деревья.



«Остров тепла» в городе.



Воздушный пузырь в воде.

секомых, чаще всего комаров, которые собираются над деревьями. Рои эти вытянуты вверх и резко очерчены — порой создается впечатление, что дерево горит. Такие рои можно наблюдать также над телевизионными антеннами и церковными шпилями. Рассказывают, что однажды пожарная команда выехала по тревоге тушить пожар в церкви, но обнаружила, что над церковью клубится не дым, а рой насекомых. Почему насекомые собираются в такие тучи?

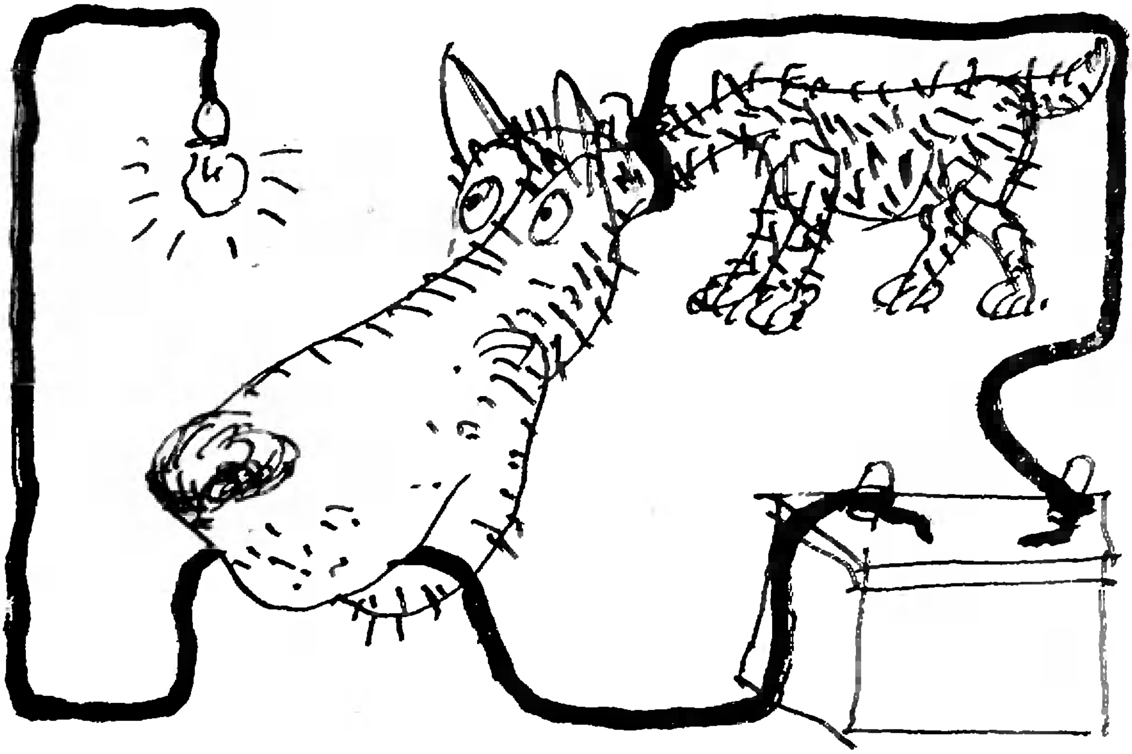
8. «Острова тепла». Почему температура воздуха в городе на 3—5 °С выше, чем в окрестности? Очевидно, что в городе большое количество тепла выделяется промышленными объектами. Но помимо этого как влияют на температуру многоэтажные здания, значительные пространства, покрытые камнем и бетоном, быстрый сток дождевой воды, уборка снега, наличие пыли в воздухе, туманы, «смоги»?

Метеорологи, составляя температурную карту города — большого или маленького,— всегда обнаруживают там «остров тепла», расположенный вблизи городского центра. По мере удаления от центра температура воздуха понижается. По этой причине, кстати, в центре города цветы весной начинают распускаться раньше, чем на окраинах и в пригородах.

9. Жаровни во фруктовом саду. Зачем садовод, опасаясь утренних заморозков, на ночь ставит в своем саду дымящиеся жаровни? Поскольку жаровни расставлены довольно далеко друг от друга, то они, конечно, не могут согреть деревья. В чем же тогда их смысл? Пользуются ли ими в дневное время?

10. Мыльные пузыри «наоборот». Мыльные пузыри «наоборот», у которых вода и воздух меняются местами, можно без труда получить, осторожно вливая с высоты нескольких миллиметров мыльную воду в тарелку с чистой водой. Если лить медленно, по поверхности воды покатятся капли. Если вы станете лить чуть быстрее, какая-нибудь капля может пробить поверхность и остаться под ней, окруженная тонкой воздушной оболочкой. Это и есть мыльный пузырь «наоборот».

Будут ли эти пузыри играть разными цветами, как обычные? Равномерна ли толщина их оболочек? Тонут ли они в тарелке или всплывают? Не будет ли внутренняя капля испаряться в воздушную оболочку, способствуя тем самым гибели пузыря?



Практикум абитуриента

Постоянный электрический ток

Кандидат физико-математических наук
В. МОЖАЕВ

Электрический ток представляет собой упорядоченное перемещение носителей заряда. Существует много способов привести их в движение. Это можно сделать механическим способом: например, заставив двигаться заряженную ленту (генератор Ван-де-Граафа) или воспользовавшись свободным падением заряженных капель воды в атмосфере (часть системы электрических токов Земли). На электростанциях свободные носители заряда в обмотках генератора приводятся в движение силой Лоренца. Но главным действующим лицом, создающим электрический ток, является, конечно, электрическое поле. Именно под его действием свободные носители заряда (как правило, это электроны) в наших бытовых электроприборах совершают упорядоченное движение, т. е. в их обмотках течет электрический ток. В этой статье мы рассмотрим лишь частный случай, когда ток — постоянный.

Для простых неразветвленных цепей токи и напряжения можно рассчитать с помощью закона Ома. В случае разветвленных электрических цепей соотношения для токов и напряжений устанавливаются с помощью так называемых правил Кирхгофа.

Первое правило Кирхгофа вытекает из закона сохранения заряда и состоит в том, что алгебраическая сумма токов, сходящихся в точке разветвления проводников (узле), равна нулю. Принято втекающие в узел токи считать положительными, а вытекающие из него — отрицательными, но можно и наоборот.

Второе правило Кирхгофа является следствием закона Ома для простейшей замкнутой цепи. Оно гласит: в любом замкнутом контуре, выделенном в сложной цепи, алгебраическая сумма ЭДС, действующих в этом контуре, равна алгебраической сумме падений напряжений на отдельных участках контура. При этом в качестве положительной можно выбрать любую ЭДС контура, а все остальные уже будут иметь вполне определенный знак — в зависимости от их полярности по отношению к выбранной. Если какой-то источник включен последовательно с выбранным нами опорным источником, ЭДС которого мы считаем положительной, то его ЭДС будет тоже положительной, а если навстречу, то ЭДС будет отрицательной. Теперь относительно алгебраической суммы падений напряжений. Сначала нужно разобраться с направлениями токов в цепях, поскольку знаки падений напряжений будут определяться этими направлениями. Так вот, положительным будет тот ток, который течет по направлению, совпадающему с направлением тока, который тек бы по данному участку под действием только одной выбранной нами опорной ЭДС (при отсутствии других источников ЭДС). Противоположное направление тока будет соответствовать его отрицательному значению.

Поясним эти правила на конкретном примере.

Задача 1. *Источниками электрического тока в системах электрического оборудования автомобилей являются генератор Г постоянного тока и соединенный с ним параллельно аккумулятор А (рис. 1). ЭДС аккумулятора $\mathscr{E}_1=12$ В, его внутреннее сопротивление $r_1=0{,}15$ Ом. ЭДС генератора $\mathscr{E}_2=14$ В, его внутреннее сопротивление $r_2=0{,}05$ Ом. Найдите зависимость силы тока I_A, протекающего через аккумулятор, от силы тока $I_н$, потребляемого нагрузкой (резистор сопротивлением R). Нарисуйте график зависимости $I_A(I_н)$.*

Направление тока $I_н$ в нашем случае однозначно: он всегда будет направлен так, как это изображено на рисунке 2. Направления же токов $I_Г$ (через генератор) и $I_А$ (через аккумулятор) могут быть выбраны произвольно — наш выбор показан на рисунке 2.

Для узла *a* по первому правилу Кирхгофа можно записать

$$I_Г+I_А-I_н=0.$$

В этом уравнении содержатся три неизвестных, но нас интересует связь между $I_А$ и $I_н$, поэтому фактически задача сводится к нахождению двух неизвестных.

Второе уравнение получим, используя второе правило Кирхгофа. Для этого выберем замкнутый контур *abcdefa*. (В нашем случае выбор однозначен, поскольку мы не можем использовать два других контура — нам не известно сопротивление *R*.) Если в качестве опорного источника выбрать генератор, то алгебраическая сумма ЭДС в контуре будет равна $\mathscr{E}_2-\mathscr{E}_1$, алгебраическая сумма падений напряжений будет равна $I_Гr_2-I_Аr_1$, а второе правило Кирхгофа будет иметь вид

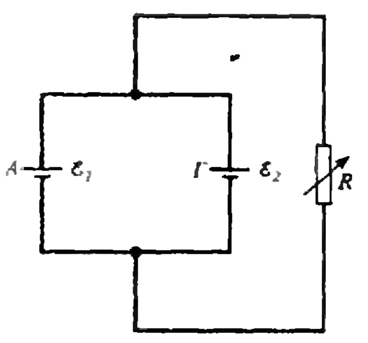


Рис. 1.

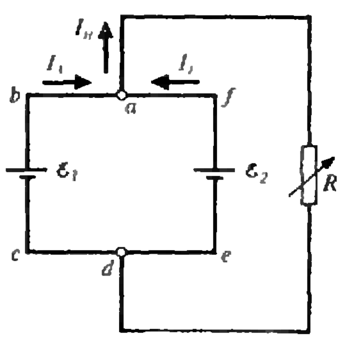


Рис. 2.

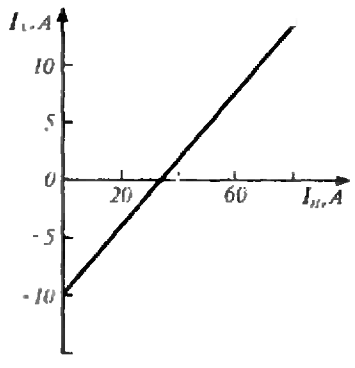


Рис. 3.

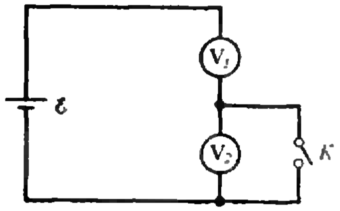


Рис. 4.

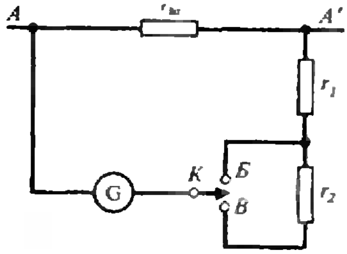


Рис. 5.

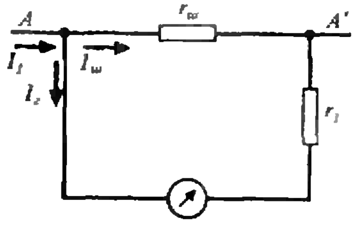


Рис. 6.

$$\mathscr{E}_2-\mathscr{E}_1=I_\Gamma r_2-I_A r_1.$$

Исключая из полученных двух уравнений I_Γ, найдем связь между I_A и $I_н$:

$$I_A=I_н\frac{r_2}{r_1+r_2}-\frac{\mathscr{E}_2-\mathscr{E}_1}{r_1+r_2}.$$

Эта линейная зависимость $I_A(I_н)$ для заданных числовых параметров изображена на рисунке 3. Как видно, при токах нагрузки $I_н<40$ А будет происходить подзарядка аккумулятора ($I_A<0$), а при токах $I_н>40$ А аккумулятор будет разряжаться.

Задача 2. *При замкнутом ключе К вольтметр V_1 показывает $0{,}8\mathscr{E}$, где $\mathscr{E}$ — ЭДС батареи (рис. 4). Что покажут вольтметры V_1 и V_2 при разомкнутом ключе, если их сопротивления равны?*

В условии задачи ничего не сказано о внутреннем сопротивлении батареи, но показание вольтметра V_1 при замкнутом ключе K не равно значению ЭДС источника, следовательно, как и всякая реальная батарея, данная батарея обладает некоторым внутренним сопротивлением. Обозначим его через r.

В первом случае, когда ключ K замкнут, вольтметр V_2 можно убрать из схемы: ток через него не течет и разность потенциалов на нем равна нулю. Тогда силу тока I_1 в цепи можно найти по закону Ома для простейшей замкнутой цепи:

$$I_1=\mathscr{E}/(R+r),$$

где R — сопротивление вольтметра. С другой стороны, по закону Ома для участка цепи (вольтметр V_1)

$$I_1=0{,}8\mathscr{E}/R.$$

Из этих выражений найдем

$$r/R=0{,}25.$$

При разомкнутом ключе показания вольтметров будут одинаковыми, поскольку они соединены последовательно, а их сопротивления равны. Пусть показание каждого вольтметра U. Запишем уравнения для тока I_2 в новой цепи: с одной стороны,

$$I_2=\mathscr{E}/(2R+r),$$

с другой стороны,

$$I_2=U/R.$$

Из этих выражений, используя полученное ранее отношение r/R, найдем

$$U=\mathscr{E}/(2+r/R)=4/9\mathscr{E}.$$

Задача 3. *Для измерения больших токов в цепи AA' в качестве шунта используется резистор сопротивлением $r_ш$, параллельно которому через резисторы сопротивлениями $r_1=2$ Ом и $r_2=91$ Ом подключается гальванометр G с внутренним сопротивлением $r_г=8$ Ом. (рис. 5). В положении Б переключателя К вся шкала прибора соответствует силе тока в цепи AA' $I_1=10$ А, а в положении В — силе тока $I_2=100$ А. Найдите сопротивление шунта.*

Рассмотрим случай, когда переключатель K находится в положении $Б$ (рис. 6). Пусть в цепи AA' течет ток $I_1=10$ А, при этом стрелка гальванометра отклонилась на всю шкалу. Обозначим силу тока, протекающего через шунт, $I_ш$, а через гальванометр —

$I_г$. Согласно первому правилу Кирхгофа,

$$I_1 = I_ш + I_г.$$

Второе правило Кирхгофа для замкнутой цепи имеет вид

$$I_ш r_ш - I_г(r_г + r_1) = 0.$$

Исключая из этих уравнений силу тока $I_ш$, получим

$$I_1 r_ш = I_г(r_1 + r_г + r_ш).$$

Рассмотрим теперь второй случай, когда переключатель K находится в положении B, а в цепи AA' течет ток $I_2 = 100$ А. Поскольку и в этом случае стрелка гальванометра находится на конце шкалы, сила тока через гальванометр сохранит свое значение. По аналогии с первым случаем, можно сразу записать

$$I_2 r_ш = I_г(r_1 + r_2 + r_г + r_ш).$$

Совместное решение этого уравнения с аналогичным уравнением для первого случая позволяет найти $r_ш$:

$$r_ш = \frac{I_1}{I - I_1} r_2 - r_1 - r_г \doteq 1/9 \text{ Ом}.$$

З а д а ч а 4. *Будет ли течь ток через идеальный диод D в цепи, изображенной на рисунке 7? Если да, то чему он будет равен?*

Предположим, что ток через диод не течет (диод заперт). Это может быть только в том случае, когда потенциал точки b больше потенциала точки a или равен ему:

$$\varphi(b) - \varphi(a) \geqslant 0.$$

Но при отсутствии тока через диод потенциалы этих точек относительно земли будут равны соответственно:

$$\varphi(a) = \frac{U_0 R_3}{R_1 + R_3} = +75 \text{ В},$$

где $U_0 = 100$ В, $R_1 = 1$ кОм, $R_3 = 3$ кОм, и

$$\varphi(b) = \frac{U_0 R_4}{R_2 + R_4} = +66\,\frac{2}{3} \text{ В},$$

где $R_2 = 2$ кОм, $R_4 = 4$ кОм.

Как видно, $\varphi(a) > \varphi(b)$. Это означает, что диод должен быть открыт и через него должен идти ток. Именно для этого случая на рисунке 7 стрелками изображены токи I_1, I_2, I_3, I_4, $I_д$, текущие в цепи. Мы имеем пять неизвестных, и наша задача — составить пять уравнений.

Поскольку сопротивление открытого диода равно нулю, потенциалы точек a и b равны: $\varphi(a) = \varphi(b)$. Из этого следует

$$I_1 R_1 = I_2 R_2,\quad I_3 R_3 = I_4 R_4.$$

Из условия сохранения заряда получаем

$$I_1 + I_2 = I_3 + I_4,\quad I_1 = I_3 + I_д.$$

Разность потенциалов U_0 равна сумме падений напряжений на R_1 и R_3:

$$U_0 = I_1 R_1 + I_3 R_3.$$

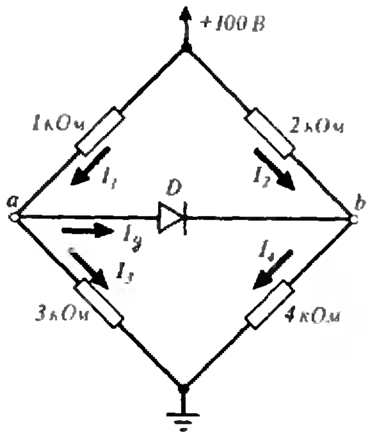


Рис. 7.

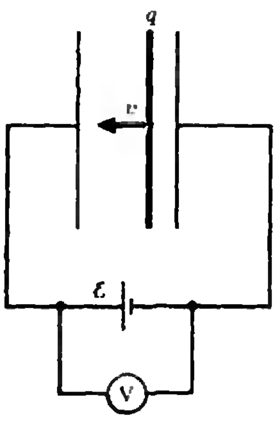


Рис. 8.

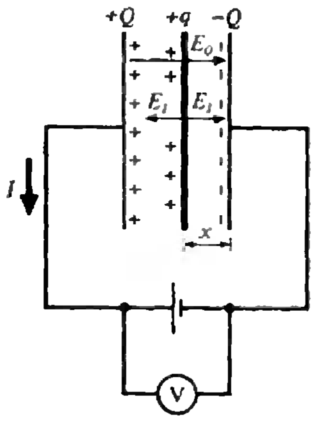


Рис. 9.

Совместное решение системы пяти уравнений позволяет найти искомый ток:

$$I_д = 4\ мА.$$

Задача 5. *В плоский конденсатор, подключенный к источнику с постоянной ЭДС $\mathscr{E}$ и внутренним сопротивлением r, помещена плоская пластина, имеющая заряд q (рис. 8). Что будет показывать идеальный вольтметр, подключенный к клеммам источника, если двигать пластину с постоянной скоростью v? Расстояние между обкладками конденсатора d.*

Мы будем рассматривать установившийся режим, когда заряженная пластина двигается с постоянной скоростью, а в цепи течет постоянный ток.

Пусть в некоторый произвольный момент времени заряженная пластина находится на расстоянии x от правой пластины конденсатора и на $d-x$ от левой и пусть в этот момент времени заряд на пластинах конденсатора равен Q, а сила тока в цепи равна I (рис. 9). Разность потенциалов между пластинами конденсатора, с одной стороны, равна $E_0d + E_1(2x-d)$, где $E_0 = Q/(\varepsilon_0 S)$ — напряженность электрического поля, создаваемого зарядами пластин конденсатора (S — площадь пластин), а $E_1 = q/(2\varepsilon_0 S)$ — напряженность поля, создаваемого зарядом движущейся пластины. С другой стороны, эта разность потенциалов, с учетом выбранного направления тока, равна $\mathscr{E} + Ir$. Приравнивая два выражения для разности потенциалов, получим уравнение

$$\frac{Q}{\varepsilon_0 S}d + \frac{q}{2\varepsilon_0 S}(2x-d) = \mathscr{E} + Ir.$$

Продифференцировав обе части этого уравнения по времени и учтя, что $Q' = -I$, $x' = v$, а $I' = 0$ (в нашем случае $I = \mathrm{const}$), мы получим значение силы тока:

$$I = qv/d.$$

При этом вольтметр будет показывать напряжение

$$U = \mathscr{E} + \frac{qv}{d}r.$$

Все, что мы рассматривали до сих пор, касалось как бы технической стороны законов постоянного тока. Но и в законе Ома для участка цепи, и в правилах Кирхгофа скрыта также физическая сторона механизма проводимости. Обсудим и ее тоже.

Задача 6. *Найдите связь между плотностью тока j и напряженностью электрического поля E внутри однородного проводника, удельное сопротивление которого ρ.*

Пусть по однородному проводнику с поперечным сечением S и удельным сопротивлением ρ течет ток I, а напряженность электрического поля внутри проводника равна E (рис. 10). Виделим внутри проводника небольшой элемент с площадью поперечного сечения ΔS и длиной Δl. Его сопротивление равно $\Delta R = \rho\Delta l/\Delta S$. Закон Ома для этого элемента будет иметь вид

$$I\frac{\Delta S}{S} = \frac{\Delta U}{\Delta R} = \frac{E\Delta l}{\rho\Delta l/\Delta S} = \frac{1}{\rho}E\Delta S.$$

В случае равномерного распределения тока по сечению плотность тока

$$j = \frac{I}{S} = \frac{1}{\rho}E.$$

Мы получили связь между абсолютными величинами j и E. Но, как оказывается, такая же связь существует и между векторами $\vec{j}$ и $\vec{E}$:

$$\vec{j} = \frac{1}{\rho}\vec{E}.$$

Это фундаментальное соотношение, связывающее в любой точке однородного вещества плотность тока с напряженностью электрического поля, называется дифференциальным законом Ома.

Задача 7. *Через два последовательно соединенных проводника с одной и той же площадью поперечного сечения S, но разными удельными сопротивлениями ρ_1 и ρ_2 ($\rho_2 > \rho_1$) течет постоянный ток I (рис. 11). Определите поверхностную плотность зарядов, возникающих на границе раздела проводников.*

Из равенства поперечных сечений проводников следует, что плотности токов в обоих проводниках будут оди-

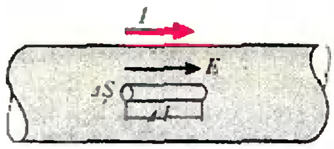


Рис. 10.

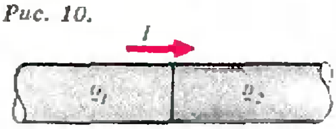


Рис. 11.

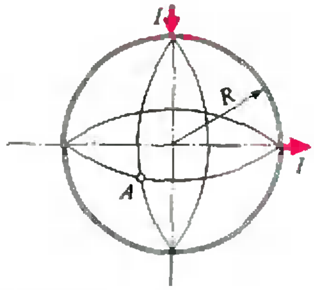


Рис. 12.

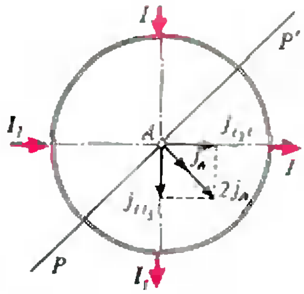


Рис. 13.

наковы:

$$j_1 = j_2 = I/S.$$

Согласно дифференциальному закону Ома, напряженности электрического поля внутри проводников будут равны соответственно

$$E_1 = \varrho_1 I/S \text{ и } E_2 = \varrho_2 I/S.$$

Мы видим, что при переходе через границу раздела проводников напряженность электрического поля испытывает скачок

$$\Delta E = E_2 - E_1 = (\varrho_2 - \varrho_1) I/S,$$

а это означает, что на границе раздела находится нескомпенсированный заряд.

Пусть поверхностная плотность нескомпенсированного заряда равна σ. Этот заряд будет создавать по обе стороны границы раздела дополнительную напряженность электрического поля, равную $\sigma/(2\varepsilon_0)$. Если обозначить через E_0 напряженность электрического поля, создаваемого только источником тока, то суммарная напряженность поля в первом проводнике равна

$$E_1 = E_0 - \sigma/(2\varepsilon_0),$$

а во втором проводнике —

$$E_2 = E_0 + \sigma/(2\varepsilon_0).$$

Следовательно, скачок напряженности поля равен

$$\Delta E = E_2 - E_1 = \sigma/\varepsilon_0.$$

Приравнивая два выражения для ΔE, получим

$$\sigma = \varepsilon_0 (\varrho_2 - \varrho_1) I/S.$$

Знак заряда на границе раздела проводников определяется разностью $\varrho_2 - \varrho_1$. В нашем случае эта величина положительная, поэтому и заряд будет положительным.

Задача 8*. *Через мыльный пузырь радиусом R и толщиной пленки δ пропускается ток силой I, как это изображено на рисунке 12. Определите величину и направление вектора напряженности электрического поля внутри пленки в точке A. Удельное сопротивление материала пленки ϱ.*

Понятно, что плоскостью симметрии для распределения плотности тока по пленке пузыря будет плоскость PP', расположенная под углом 45° к осям симметрии шара, вдоль которых течет ток I (рис. 13). Эта плоскость будет являться одновременно и эквипотенциальной поверхностью, поэтому векторы напряженности электрического поля и плотности тока в точках пересечения плоскости PP' с шаром будут перпендикулярны этой плоскости.

Пропустим через пленку пузыря, симметрично току I, еще один ток — I_1, как это показано на рисунке 13. Плоскость PP' будет являться эквипотенциальной поверхностью и для тока I_1, а напряженность электрического поля и плотность тока в точке A будут такими же, как и при токе I. Если мы обозначим плотность тока в точке A при токе I через $\vec{j}_A$, то при одновременном протекании токов I и I_1 она будет равна $2\vec{j}_A$.

Теперь посмотрим на нашу суперпозицию токов с другой стороны. Можно считать, что по пленке пузыря текут два тока по взаимно перпендикулярным направлениям — вдоль горизонтальной и вертикальной осей. Плотности токов в точке A, создаваемые такими токами, будут одинаковы и равны $j_{II}=j_{I,I}=I/(2\pi R\delta)$. Тогда

$$2j_A=\sqrt{j_{II}^2+j_{I,I}^2}=I/(\sqrt{2}\pi R\delta),$$

а

$$E_A=\varrho j_A=I\varrho/(2\sqrt{2}\pi R\delta).$$

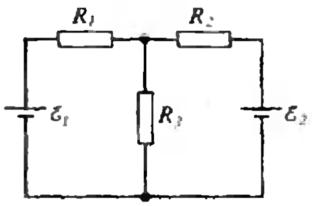


Рис. 14

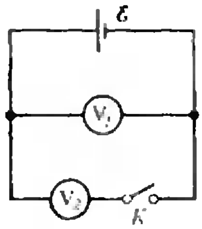


Рис. 15.

Упражнения

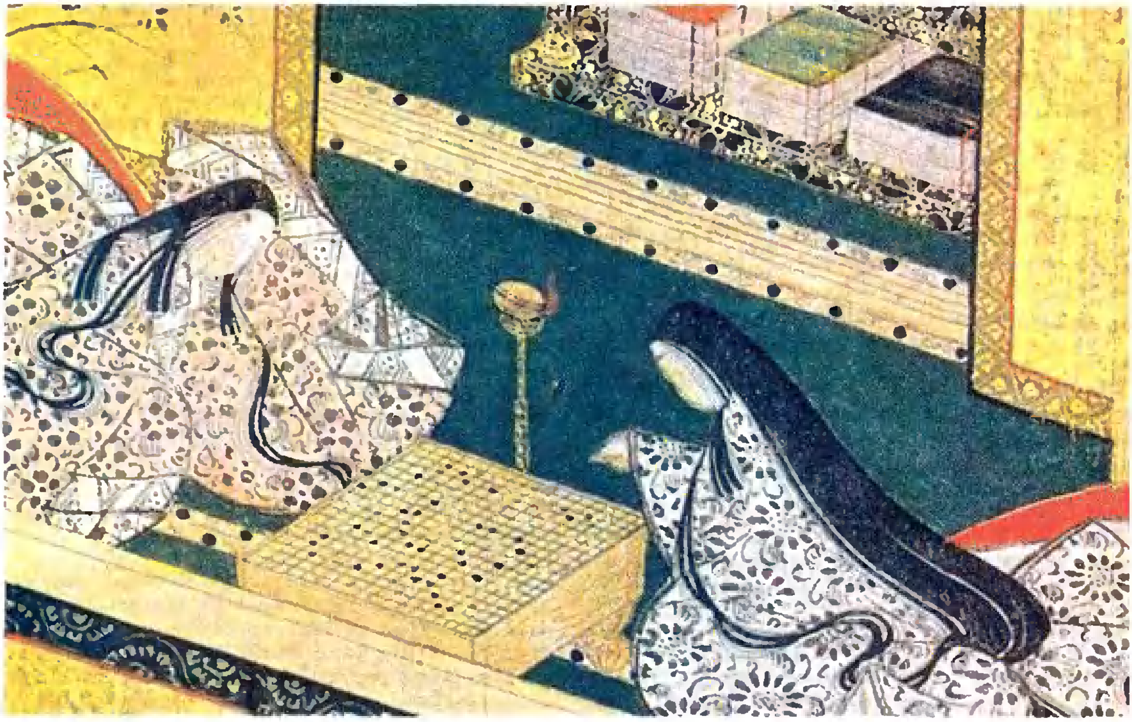
1. Электрическая цепь, состоящая из резисторов, сопротивления которых R_1, R_2 и R_3, подключена к двум источникам с ЭДС $\mathscr{E}_1$ и $\mathscr{E}_2$ (рис 14). При каких условиях ток через резистор сопротивлением R_1 будет равен нулю? Внутренними сопротивлениями источников можно пренебречь.

2. При разомкнутом ключе K вольтметр V_1 показывает $0{,}9\mathscr{E}$, где $\mathscr{E}$ — ЭДС батареи (рис. 15). Что покажут вольтметры при замкнутом ключе, если сопротивление вольтметра V_2 вдвое меньше сопротивления вольтметра V_1?

3. При подключении к неизвестному источнику вольтметра, рассчитанного на измерение напряжений до 10 В, вольтметр зашкаливает. Если одновременно подключить два таких вольтметра — параллельно или последовательно,— то они в обоих случаях покажут одинаковые значения $U=8$ В. Определите ЭДС неизвестного источника.

4. Присоединение к вольтметру некоторого добавочного сопротивления увеличивает предел измерений напряжения в n раз. Другое добавочное сопротивление увеличивает предел измерений в m раз. Во сколько раз увеличится предельно измеряемое вольтметром напряжение, если последовательно с вольтметром включить эти два сопротивления, соединенные между собой параллельно?

5. Пространство между пластинами плоского конденсатора заполнено жидкостью с диэлектрической проницаемостью ε и удельным сопротивлением ϱ. Найдите силу электростатического взаимодействия между пластинами конденсатора, когда через конденсатор течет ток I. Площадь пластин конденсатора S.



Игры и головоломки

Игра го

Разрезание и соединение камней

Важное значение в партии имеет взаимосвязь камней. Совместные действия групп представляют значительную силу, разрозненные слабые группы подвергаются атаке и, в лучшем случае, обеспечивают себе жизнь.

На рисунке 1 приведена позиция, в которой два белых камня не являются соединенными между собой в одну группу. Ходом 1 черные разделяют их на две части. В результате белые попадают в затруднительное положение, и велика вероятность, что какой-нибудь из камней погибнет. Если же белые успеют соединиться в точке 1, то их камни будут представлять значительную силу, и их будет не так-то легко захватить в плен.

Окончание. Начало см. в «Кванте» № 6 и № 7.

Прямые соединения выполняют важную роль, особенно при непосредственном столкновении с камнями противника. Когда же прямого столкновения нет, намного выгоднее соединить свои камни не вплотную, а более широко, но таким образом, чтобы при их атаке они всегда могли соединиться.

Рассмотрим две позиции (рис. 2, *а*, *б*). На рисунке 2, *а* показан пример, в котором играющий, памятуя о том, что соединять камни хорошо, расставил их в цепочку (ходы 1—9). Это неэффективный путь игры. Более удачно расставил свои камни на рисунке 2, *б* другой игрок (ходы 1—5). В обоих случаях очерчены одинаковые территории, однако на рисунке 2, *а* для этого потрачено пять камней, а на рисунке 2, *б* — только три.

Можно, конечно, сказать, что на рисунке 2, *б* беспокойство вызывают промежутки между камнями «а» и «в». Но здесь нет повода волноваться. Если противник попытается ворваться туда (ход 1 на рисунке 2, *в*), то после хода 2 его постигнет неудача.

Ко-борьба

Ко-борьба — сложный раздел тактики. Применение ее приводит к острым продолжениям, обменам больших групп камней и требует хорошего понимания игры в целом.

Рассмотрим позицию на рисунке 3, *а* и возможное продолжение партии. Белые, избирая спокойный путь игры, делают в центре ход 1. Черные ходом 2 создают ситуацию сэки в правом верхнем углу, тем самым избавляясь от возможных осложнений. Последующая игра приведет к следующему результату: 15 камней у белых против 16 у черных. Такой результат не может устроить белых. Поэтому они завязывают своим первым ходом ко-борьбу в правом верхнем углу. Эта более сложная игра позволяет белым использовать свое преимущество в ко-ударах («а» и «в»), каждый из которых угрожает черным потерей группы. У черных всего лишь одна серьезная ко-угроза в «с».

На рисунке 3, *б* демонстрируется применение белыми ко-борьбы, в которой происходит естественный обмен четырех отмеченных белых камней (11 очков) на группу черных в углу (20 очков). Черные получают на 7 очков больше по сравнению с позицией на рисунке 3, *а*. Теперь подсчет очков в пользу белых: 29 против 28 у черных. Из разобранного примера видно, что применение ко-борьбы необходимо в случаях, когда более простая игра не приводит к успеху.

Тэсудзи

Мы уже упоминали, что ходы, использующие наилучшим образом недостатки в построении противника, называются тэсудзи. Знание различных типов тэсудзи очень важно, так как они используются во всех стадиях игры — будь то фусэки, середина или ёсэ.

Разберем несколько наиболее популярных тэсудзи.

Ситё. Так называется один из способов захвата камней. В го существует даже поговорка: «Не знаешь ситё — не умеешь играть в го».

В позиции на рисунке 4 черные ходом 1 захватывают камень белых в ситё. Если белые попытаются убежать от захвата и сыграют в 2, то черные последуют за белыми камнями и сыграют в 3, снова ставя их в положение атари. Белые играют в 4, черные — в 5 и так далее до хода 17. Здесь белые попадают на край доски, бежать им некуда, и поэтому все их камни оказываются захваченными. Расположение камней во время побега напоминает по конфигурации лестницу, поэтому ситё еще иногда называют лестницей.

Позиция на рисунке 5 очень похожа на предыдущую. Однако если черные и в этом случае попытаются захватить белый камень в ситё, то они потерпят неудачу, так как на пути у них окажется отмеченный камень белых, который называется *ситё-прерыватель*. Прежде чем за-

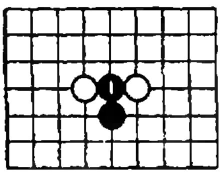


Рис. 1.

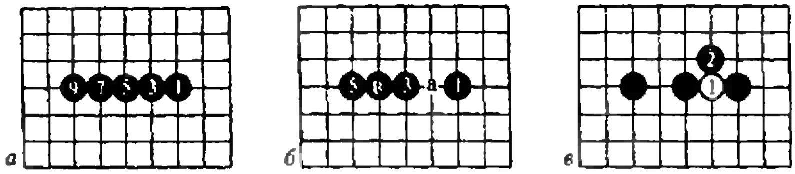


Рис. 2.

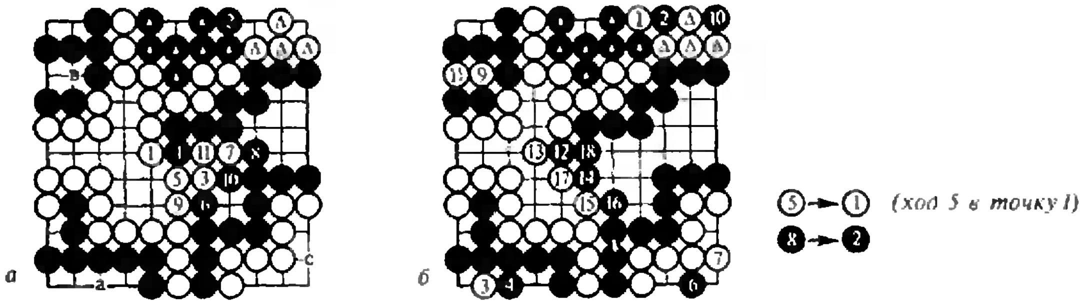


Рис. 3.

хватить в ситё, надо посмотреть, нет ли на пути *ситё-прерывателя.*

В заключение отметим, что ситё не самый лучший способ захвата разрезающих камней. Он применяется лишь в том случае, если нет ничего лучшего. Ведь стоит только появиться ситё-прерывателю, и захваченный камень может вырваться из окружения. Поэтому чаще всего тратят еще один ход для окончательного захвата камня.

Гэта. Так называется другой способ захвата камней — ход 1 на рисунке 6.

Защелка. Одно из наиболее известных тэсудзи, применяемое для захвата камней противника.

На рисунке 7 черные сделали ход 1, пытаясь избежать захвата трех своих камней. На первый взгляд, это им удалось, так как обычные способы съедания камней в точке 3 ни к чему не приведут. Однако у белых имеется тэсудзи. Ходом 2 они жертвуют один камень и затем после ходов 3—6 захватывают камни черных в плен.

Есэ

В заключительной стадии игры вся доска уже разделена на контролируемые игроками территории, но границы их еще до конца не оформлены. Поэтому партнеры стремятся как можно больше увеличить свою территорию и уменьшить территорию противника.

В начале или в середине партии невозможно рассчитать ценность того или иного хода. В конце игры позиция становится более определенной, и такой расчет можно практически сделать для каждого хода, хотя это и бывает довольно трудно.

На рисунке 8 рассмотрен наиболее простой случай расчета ценности хода. Отмеченные черный и белый камни на рисунке 8, *а* обозначают границы своих территорий, но пограничные камни еще не достигли первой линии доски и территории еще полностью не достроены.

Предположим, что результат партии зависит только от разницы между этими двумя территориями. Тогда все будет зависеть от очередности хода. Если ход черных (рис. 8, *б*), то они завершают свою территорию ходами 1 и 3. Подсчитав очки, можно увидеть, что у черных шесть очков территории, а у белых только пять и черные добиваются победы с перевесом в одно очко. Если же ход белых (рис. 8, *в*), то они ходами 1 и 3 завершают свою территорию. Теперь у них будет шесть очков территории, а у черных пять. Сравнив результаты, мы видим, что разница между ними два очка, т. е. ценность хода на данном участке доски составляет два очка.

Но не всегда так просто подсчитать величину хода. В реальной партии встречаются более сложные ситуации. Рассмотрим одну из них.

На рисунке 9 приведена позиция с неразыгранным местом (в правом верхнем углу), в котором надо рассчитать величину хода. Правильный ход белых — 1. Черные отвечают ходами 2 и 4, после чего белые, сохраняя инициативу, играют в другом месте. Позже черные проведут обмен ходами 6 и 7. Затем белые, в свою очередь, проведут обмен 9 и 10. Подсчитав территорию, мы увидим,

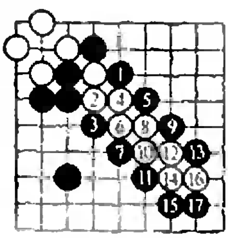


Рис. 4.

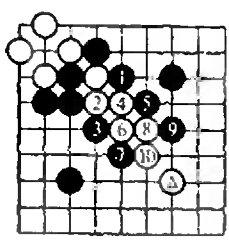


Рис. 5.

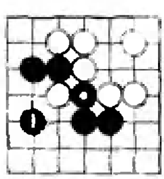


Рис. 6.

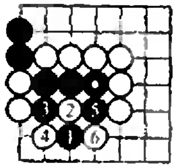


Рис. 7.

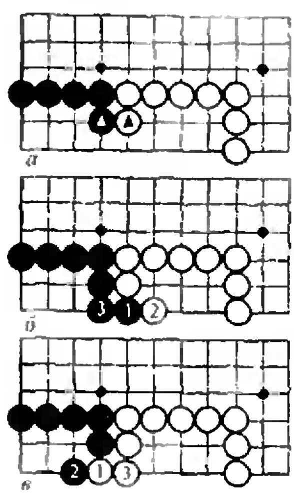


Рис. 8.

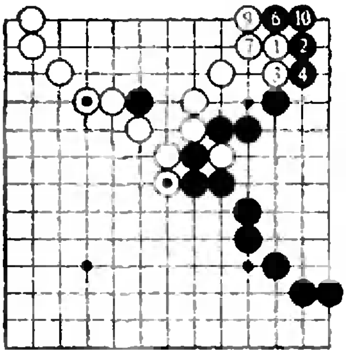


Рис. 9.

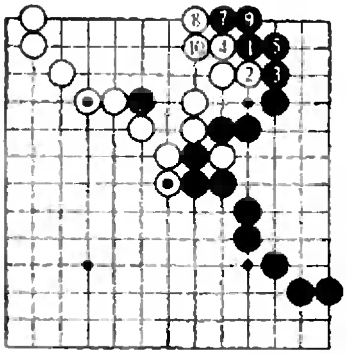


Рис. 10.

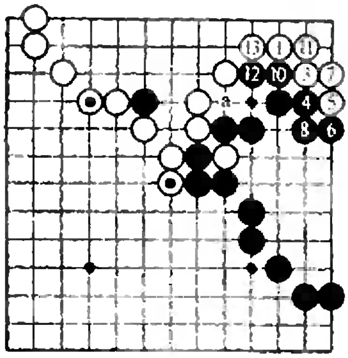


Рис. 11.

что у белых она равняется 23 очкам против 26 у черных.

Разобранный пример показывает, что определить величину хода в ёсэ довольно трудно. Однако еще сложнее оказывается не расчет ходов, а их взаимоотношение — с потерей или без потери темпа они делаются.

Если же здесь первыми сыграют черные (ход 1 на рисунке 10), то после обменов (ход 6 сделан в другом месте) белые имеют территорию 19 очков, черные — 30. Разница с предыдущим розыгрышем составляет 8 очков. Следовательно, ценность хода в этой позиции равна 8 очкам. Но обратим внимание, что белые могут получить эти 8 очков без потери темпа, а черные с потерей.

Возникает вопрос: всегда ли белые ход 1 могут сделать с темпом? Рассмотрим рисунок 11. Если черные не отвечают на ход белых 1 (т. е. играют в другом месте), то те играют в пункт 3 и до хода 8 сохраняют инициативу. В дальнейшем черные без потери темпа делают ходы 10 и 12. После проведения этой операции территория белых составит 28 очков, а черных — 19,5 очка (ход в точку «а» дает одно очко с потерей темпа, и поэтому в расчет берется 0,5 очка).

Сравнивая этот результат с двумя предыдущими, видим, что выгода белых теперь составляет 19,5 очка с потерей темпа. Белые могут его делать, когда наибольший ход на доске с потерей темпа равен 19 очкам или меньше.

Для понимания некоторых тонкостей ёсэ рассмотрим два термина — *сэнтэ* и *готэ*.

Сэнтэ называется такой ход, который делается без потери темпа. Соответственно, готэ — ход с потерей темпа.

Существуют три основных сэнтэ-готэ соотношения:

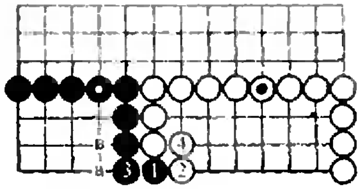


Рис. 12.

— *обоюдное сэнтэ;*
— *обоюдное готэ;*
— *сэнтэ-готэ* (обратное сэнтэ).

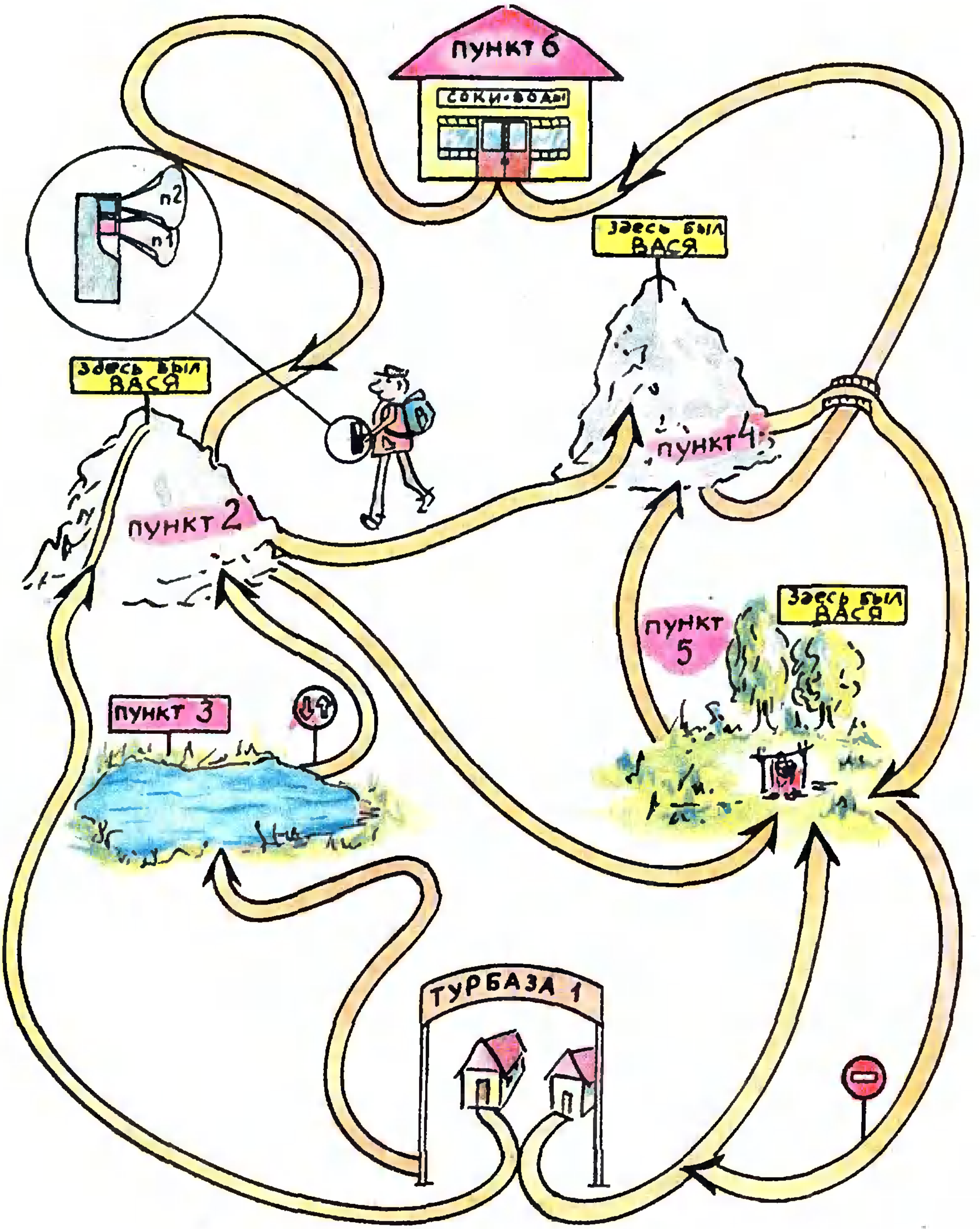
Ситуация на рисунке 8 является примером обоюдного готэ. Пример сэнтэ-готэ разобран на рисунках 9, 10. Остается рассмотреть обоюдное сэнтэ (рис. 12). Здесь, кто бы ни играл первым, заканчивает в сэнтэ. Это очень хорошие ходы, и оба партнера стараются как можно раньше сыграть их. Поэтому в ёсэ важно не только подсчитать ценность хода, но и определить, какой он — сэнтэ или готэ.

Вы научились играть в го, познакомились с основами стратегии и тактики. Но наступит момент, когда вам захочется принять участие в официальных соревнованиях, померяться силами с мастерами, получить спортивный разряд. Тогда вы можете обратиться в клуб «Восток» по адресу: *105484, Москва, 16-я Парковая ул., д. 27, кв. 165; тел. 463-20-11; 461-21-14.*

Е. Гик, А. Попов

ЭВМ перебирает варианты

Л. ШТЕРНБЕРГ



«В течение нескольких секунд ЭВМ проанализировала огромное количество возможных вариантов и выдала наилучший»,— такую или подобную фразу нередко можно увидеть в газете, когда рассказывают о широких возможностях ЭВМ. Но для того чтобы перебирать варианты, ЭВМ должна иметь соответствующую программу. Какую же?

Если надо просмотреть таблицу и выбрать наибольший (наименьший, наи...) элемент, то достаточно воспользоваться в программе простым циклом. Если надо перебрать все возможные сочетания пар элементов, один из которых берется из одной таблицы, а другой — из второй таблицы, то придется сделать вложенный цикл:

```
   ...таб A [1:M], ...таб B[1:N]
нц для i от 1 до M цикл
 | нц для j от 1 до N цикл обработка
 |  |                   пары (A[i], B[j])
 | кц
кц
```

Ну а если надо просмотреть все сочетания из 10 элементов — что делать: 10 вложенных циклов? А если из 100 элементов? А если число элементов заранее не известно и вообще различно в разных вариантах — что делать тогда?

Пусть, например, надо определить кратчайший маршрут из пункта A в пункт B, до которого можно добраться разными способами. Для этого придется просмотреть все маршруты, одни из которых содержат лишь одну пересадку, а другие 5 или 6 пересадок.

Как организовать циклы перебора возможных вариантов? И сколько их должно быть? Простым вложенным циклом здесь не поможешь, нужна явно какая-то другая идея.

Итак, перед нами элемент высшего программистского пилотажа — *переборная задача*. Но оказывается, что для ее решения *всегда достаточно всего лишь двух циклов и одного магазина*. Магазин нам потребуется не тот, в котором что-то покупают, а тот, который имеется у винтовки или автомата, точнее, его программный аналог. Особенностью магазина является то, что патрон в него *можно положить только с одного конца* (через *окно* магазина), при этом бывшие там патроны проталкиваются вглубь. И достать патрон *можно только через окно*, с того же конца, при этом в окне появляется новый патрон из глубины магазина. Нетрудно видеть, что доставать патроны можно *только в порядке, обратном тому, в котором их клали* — это и есть нужная нам особенность магазина. Программисты еще называют магазин *стеком* (от. англ. *Stack* — пачка: в пачку кладут сверху и берут сверху).

Программный аналог магазина — это массив и переменная-индекс, показывающая, до каких пор этот массив заполнен:

... таб МАГ [1:K] цел

Значение im показывает первую свободную ячейку магазина.*) Запись значения E в магазин производится так (рис. 1):

$$\text{МАГ}[im] := E; \; im := im + 1,$$

а извлечение так (рис. 2, 3):

$$im := im - 1; \; E := \text{МАГ}[im].$$

Попробуем разобрать простейшую переборную задачу. Предположим, что инструктору по туризму Васе поставлена задача просмотреть все N-дневные (мы возьмем $N=3$) маршруты, начинающиеся на Васиной турбазе, проверить проходимость троп, оборудовать стоянки и т. д., т. е., попросту говоря, пройти по очереди все маршруты. Проходить их можно в любом порядке, и Вася, не мудрствуя лукаво, всегда начинает с самой левой дороги. Первый маршрут очевиден: 1—2—4—6. Но по дороге были развилки. Значит, надо вернуться и пройти по развилкам. Из пункта 2 можно уйти еще в 5, затем в 1, или в 6, или в 4. Прошли маршрут 1—2—5—1, верну-

*) Есть вариант магазина, в котором im указывает последнюю занятую ячейку.

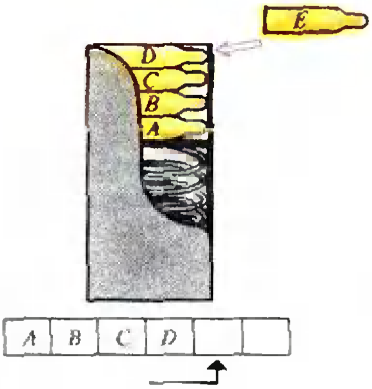


Рис. 1.

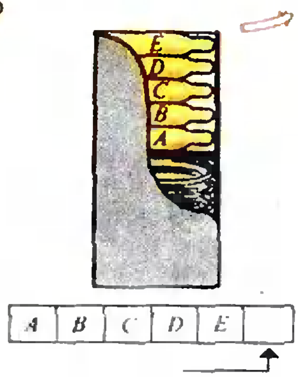


Рис. 2.

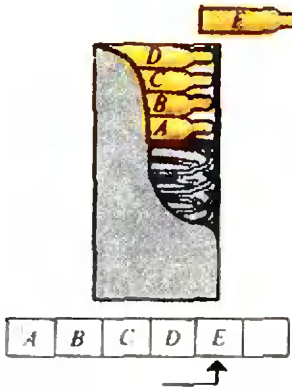


Рис. 3.

лись в 5; а откуда мы приходили в 5: из 1, 2 или 3? И сколько дней в пути: если шли через 1—2—5, то 2 дня, а если через 1—5, то — один? Всё, Вася запутался окончательно. (И мы с ним тоже.) Конечно, маршруты записаны, но в совершенном беспорядке, и найти уже пройденный и определить, какой нужен следующий, довольно сложно.

И тут Вася вспомнил, что в рюкзаке у него есть магазин, и решил, что уходя из пункта, он запишет номер пункта на бумажке, бумажку положит в патрон, патрон — в магазин: тогда в магазине будет накапливаться маршрут, а количество патронов будет определять его длину. Для удобства (чтоб не забыть, где родная турбаза) на дно магазина был положен красный патрон с записью «1». На третий день Вася добрался до пункта 5 и записал в дневник первый маршрут: 1—2—4—5.

Утром вспоминать, откуда он пришел в 5, не потребовалось: в окне магазина был патрон с запиской «пункт 4» — значит, надо возвращаться в пункт 4. Обработав маршрут 1—2—4—6 и опять вернувшись в пункт 4, Вася обнаружил, что больше из пункта 4 идти некуда. Надо возвращаться назад, но куда? И тогда он вынул патрон из магазина, и в окне магазина увидел патрон с запиской: «пункт 2». Вернувшись в пункт 2, он пошел от развилки правее — в пункт 5 и изучил маршруты 1—2—5—1, 1—2—5—6. Пройдя все маршруты вида 1—2—..., он вытащил из магазина и патрон с запиской «пункт 2», вернулся в пункт 1, прошел маршруты по очередной правой дороге: 1—3—2—4, 1—3—2—5, 1—3—5—1 и т. д., по самой правой: 1—5—... и, наконец, исчерпал все варианты выхода из пункта 1. Теперь надо выбросить красный патрон и отходить назад, но больше отходить некуда: магазин пуст, а значит, все маршруты исчерпаны. И перебраны они оказались в лексикографическом порядке (т. е. упорядочены, как в словаре: сначала слова на «А», затем на «Б» и т. д., причем слово «АБ...» стоит раньше, чем «АВ...»).

Запишем алгоритм, которым пользовался Вася.

```
Предстартовая подготовка
Отметить 1-й вариант (левую дорогу) в стартовой точке
нц пока магазин не пуст цикл
  искать очередной вариант пути (дорогу, по
      которой еще не шли)
  если дороги нет
  | то выбросить патрон из магазина;
  |    вернуться в пункт, записанный в окне
  |    магазина
  | иначе если маршрут завершен
  |       то обработать маршрут (записать
  |          его)
  |       иначе положить в магазин патрон,
  |          с номером пункта, из кото-
  |          рого ушли; пройти до ново-
  |          го пункта; отметить в этой
  |          точке 1-ю (левую) дорогу
  |       все
  все
кц
```

Но это — алгоритм для Васи, а как его записать для ЭВМ? Сеть дорог с точки зрения математики представляет собой *граф*, т. е. множество из M точек, соединенных дугами (или ребрами), который задается с помощью таблицы размером $M \times M$, называемой *матрицей смежности*. Ее элемент c_{ij} равен 1, если из точки i в точку j есть путь (т. е. дуга), и равен 0, если пути нет. Граф может быть *ориентированным* — по ребру можно идти только в одном направлении, и *неориентированным*, если каждое ребро проходимо в обоих направлениях. В этом случае матрица получается симметричной, т. е. $c_{ij}=c_{ji}$ (это все равно, что соединять вершины парой направленных дуг: одна дуга туда, вторая — обратно). Если считать, что по Васиным тропам можно водить туристов только в направлении, показанном стрелкой (по каким-то причинам), то эта сеть задается графом:

$$C=\begin{pmatrix} 0&1&1&0&1&0\\ 0&0&0&1&1&0\\ 0&1&0&0&1&0\\ 0&0&0&0&1&1\\ 1&0&0&1&0&0\\ 0&0&0&0&1&0 \end{pmatrix}$$

Предстартовая подготовка заключается в том, чтобы положить в магазин красный патрон. Строго говоря, его можно и не класть: стартовую точку несложно запомнить, но с ним удобнее программировать, ибо без него возврат в стартовую точку придется программировать не так, как в другие. Поэтому в магазине предусмотрим еще нулевую ячейку для красного патрона. С выбором дорог будем поступать так: поскольку их надо перебирать в каком-то порядке, а какая из них левее, по матрице не определишь, то просто будем перебирать пункты по возрастанию их номеров и брать тот пункт, в который есть дорога. Т. е. более «левой» считаем дорогу в пункт с меньшим номером. Переменная Нп будет определять номер пункта, куда мы хотим идти. В качестве отметки 1-го варианта мы будем Нп присваивать значение 0, т. е. покажем, что еще не проверяли пути ни в один пункт. Проверка на завершение маршрута проста: если в магазине есть N элементов, то маршрут пройден. В итоге получаем программу:

```
    цел таб МАГ [0: N], цел i, j, Нп; N;
    МАГ [0]: = номер стартовой точки; im: = 1
    Нп: = 0; |еще ни один путь не пройден|
    Нп: = im + 1
нц  пока im > 0 цикл |магазин не пуст|
  | нц пока Нп ≤ M и C[МАГ[im − 1], Нп] = 0
  | |        Нп: = Нп + 1
  | кц
  | если Нп > M |больше путей из этой точки нет|
  |  | то  im: = im − 1; Нп: = МАГ[im] |верну-
  |  | |                            лись назад|
  |  | иначе если  im = N |маршрут завершен|
  |  |          | то печать (МАГ[0]...МАГ[im − 1],
  |  |          | |                          Нп)
  |  |          | иначе МАГ[im]: = Нп; im: = im +
  |  |          |        + 1 |положили в магазин
  |  |          |        патрон с номером пункта,
  |  |          |             из которого уходим|
  |  |          |        Нп: = 0 |отсюда еще ниче
  |  |          |                 го не проходили|
  |  |          все
  | все
кц
```

Отметим, что внутренний цикл пока завершает свою работу в двух случаях: а) либо Нп$>M$, т. е. просмотрели все дороги и ничего не нашли, б) либо С[МАГ[$im-1$], Нп]$=1$, т. е. из пункта, который мы записали в магазин как покидаемый, в пункт Нп есть путь. Во втором случае мы идем в пункт Нп и тут же записываем Нп в магазин, так как теперь мы собрались покидать этот пункт. Только последний пункт маршрута нет смысла записывать в магазин, так как его оттуда придется тут же извлечь. Таким образом, при печати пунктов маршрута их надо брать из магазина, а последний пункт — из Нп. При возврате в какой-либо пункт из магазина выбрасывается патрон, но содержимое его попадает в Нп, т. е. в Нп оказывается номер пункта, из которого вернулись, и можно проверять пути в пункты с бо́льшими номерами.

Теперь попробуем усложнить задачу. Давайте запретим кольцевые и самопересекающиеся маршруты, т. е. маршрут не должен дважды проходить через один и тот же пункт. Что изменится в алгоритме? Почти ничего. Усложнится только внутренний цикл: если раньше он искал любой пункт, в который есть дорога из текущей точки, то теперь он должен проверить, не было ли ее уже на нашем пути, т. е. просмотреть содержимое магазина.

Задача 1. *Напишите программу, дающую все маршруты длины N, без самопересечений, исходящие из данной точки.*

Изменим задачу: пусть нам нужны все маршруты не заданной длины, а приводящие из пункта A в пункт B. Что меняется в алгоритме? Только проверка на конец маршрута: она выглядит так:

если Нп$=B$ то...

Но не всегда нам нужны все маршруты. Пусть мы хотим найти кратчайший путь из A в B. Что меняется? Опять мало что: только блок обработки. Если раньше мы просто печатали очередной маршрут, то теперь надо первый маршрут запомнить в другой таблице, и если очередной маршрут оказался короче, то запоминать его. (Здесь, правда, потребуются и дополнительные присваивания в предстартовой подготовке.)

Задача 2. *Напишите полностью алгоритм поиска кратчайшего маршрута.*

До сих пор мы работали с графом, который напоминает скорее не дорожную, а телеграфную сеть: переход из пункта в пункт идет всегда за одно и то же время. Для задания дорожной сети придется несколько изменить матрицу C: ее элементы будут принимать любые положительные значения, которые задают длины путей (или время в пути). Теперь длина пути (время в пути) должна подсчитываться не по количеству пройденных пунктов, а путем суммирования *веса* дуги (т. е. числового значения элемента c_{ij}) при проходе в очередной пункт и вычитания при возврате.

Задача 3 (задача про плечо обслуживания локомотивного депо). *Дан взвешенный граф (т. е. граф, на дугах которого заданы числа-веса), описывающий дорожную сеть. Вес — время прохождения дуги. В пункте A находится локомотивное депо. Определите пункты, в которых надо построить депо для смены локомотивов, исходя из того, что локомотив (точнее его бригада) должен быть в пути не более T часов.*

В переборных задачах магазин иногда состоит из нескольких массивов, а иногда нужны и дополнительные массивы для разных целей. Использование дополнительных массивов мы видели в задаче поиска минимального пути. Пример двухмассивного магазина дает такая

Задача 4. *Пусть тот же взвешенный граф задает трубопроводную сеть: числа на дугах определяют толщину (пропускную способность). Толщина маршрута определяется минимальной толщиной входящих в него дуг. Надо найти самый толстый маршрут из A в B.*

Здесь удобно взять магазин из двух массивов: МАГ и ТОЛ (элемент массива ТОЛ показывает текущую толщину маршрута). Запись в магазин выглядит так:

$$\text{МАГ}[im]:=\text{Нп};$$
$$\text{ТОЛ}[im]:=\min\{\text{ТОЛ}[im-1],\ \text{С}[\text{МАГ}[im-1],\ \text{Нп}]\};$$
$$im:=im+1$$

(если дуга из пункта с номером МАГ$[im-1]$ в Нп тонкая, то она уменьшает толщину всего маршрута), а выбрасывание из магазина не меняется. Окно магазина теперь состоит из двух значений: ТОЛ$[im-1]$ показывает текущую толщину маршрута.

Задача 5. *Напишите поиск самого толстого пути полностью.*

В заключение отметим, что умение программировать переборные задачи позволяет переложить на плечи машин как раз ту работу, где машины незаменимы: когда математические методы бессильны найти оптимум, расчеты просты, но надо проверять варианты, варианты, варианты...

Олимпиады

Болгарская олимпиада по математике

Честно говоря, я надеюсь удивить читателей «Кванта» тем, что Болгарская олимпиада по математике является одним из старейших в мире национальных математических соревнований «олимпиадного типа» для школьников. Правда, те немногие соревнования, которые проводились до 1949/50 учебного года — первого года болгарской олимпиады, охватывали преимущественно отдельные школы или города. Конечно, в данном случае важен не рекорд, а давняя традиция, длинный путь развития, накопление опыта. Можно отметить, например, что после первых восьми лет проведения она прервалась на два года и возродилась в 1959/60 учебном году, после Первой Международной математической олимпиады (ММО).

Принципы организации олимпиады за годы ее проведения неоднократно менялись и совершенствовались. Наверное, и сейчас, пока готовится эта заметка, что-нибудь изменится. И все-таки стоит коротко перечислить некоторые детали, чтобы создать у читателя представление о ее незатейливом, но четко работающем механизме.

Болгарская олимпиада по математике проводится в два тура для школьников с четвертого по десятый классы и в четыре тура для школьников одиннадцатого класса. Первый и второй туры можно условно назвать соответственно «школьным» и «городским»; на второй допускаются победители первого тура. В каждом туре участникам предлагается решить три задачи за 2,5 часа для младших классов и за 4 часа для старших.

На «городском» уровне олимпиада заканчивается для всех участников, кроме самых старших — школьников 11 класса. Вместе с самыми старшими в виде «общепринятого исключения» продолжают соревноваться и их более молодые соперники — лучшие математики 10, 9 и иногда даже 8 класса. Разумеется, без скидок, по задачам 11 класса.

Третий тур проводится в два дня в середине апреля в нескольких городах, по задачам, разработанным национальным жюри. Каждый день даются по три задачи. Местные жюри после проверки посылают лучшие работы центральной комиссии, где после второй проверки определяются участники последнего, четвертого тура (обычно около 100 человек).

Четвертый тур проходит в Софии в середине мая, в два дня. Каждый день даются по три задачи, которые нужно решить за 4,5 часа, и на следующий день объявляются победители. 12 лучших из них участвуют в сборах для подготовки и отбора участников команды для ММО. Им же предоставляется возможность поступить в Софийский университет на факультет математики и информатики без вступительного экзамена.

Предлагаем читателям «Кванта» одну из задач (IV тур 1988 года).

Дан треугольник ABD, C — произвольная точка луча AD, E и F — точки касания соответственно сторон DA и BD треугольника ABD с вписанной в него окружностью. Докажите, что при движении точки D по лучу AC прямая EF проходит через некоторую постоянную точку.

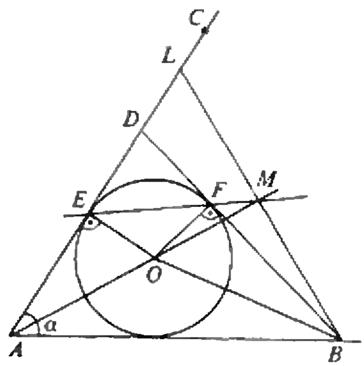
Решение. На луче AC возьмем точку L так, чтобы $AL=AB$, и обозначим через M середину отрезка BL (см. рисунок). Докажем, что для любого положения точки D на луче AC прямая EF проходит через точку M.

Обозначим $\vec{DA}=\vec{a}$, $\vec{DB}=\vec{b}$, $DA=a$, $DB=b$, $AB=AL=d$, $a+b+d=2p$.

Тогда

$$\vec{DL}=\frac{a-d}{a}\vec{a},$$

$$\vec{DF}=\frac{p-d}{b}\vec{b},$$



$$\overrightarrow{DM}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{DB}+\overrightarrow{DL})=\frac{1}{2}\left(\vec{b}+\frac{a-d}{a}\vec{a}\right).$$

Следовательно,

$$\overrightarrow{FM}=\overrightarrow{DM}-\overrightarrow{DF}=\frac{1}{2}\vec{b}+\frac{a-d}{2a}\vec{a}-\frac{p-d}{b}\vec{b}=$$

$$=\frac{a-d}{2}\left(\frac{\vec{a}}{a}-\frac{\vec{b}}{b}\right).$$

Отсюда вытекает, что прямая FM перпендикулярна биссектрисе угла ADB. Так как прямая EF тоже перпендикулярна этой биссектрисе, то она проходит через точку M, что и требовалось доказать.

В заключение заметим, что за последние 10 лет команда Болгарии на Международной математической олимпиаде неизменно находится среди 5—8 лучших команд мира. Для такой небольшой по размерам страны это неплохо.

Задачи XL Болгарской национальной математической олимпиады школьников 1991 года

1. Точка M лежит на высоте CD остроугольного треугольника ABC, точки K и L — ортогональные проекции точки M на стороны AC и BC. Известно, что центры вписанной и описанной окружностей треугольника ABC лежат на отрезке KL.

а) Докажите, что $CD=R+r$, где R и r — радиусы описанной и вписанной окружностей;

б) найдите наименьшее значение отношения $CM:CD$.

2. Пусть n — четное натуральное число, отличное от 2, и K — куб с ребром n. Куб K разделен на n^3 единичных кубиков, ребра которых параллельны ребрам большого куба. Всякую группу из n^2 единичных кубиков, основания которых лежат на одной горизонтальной или вертикальной плоскости, назовем слоем в K. Имеется $\frac{n^3}{4}$ цвета, которыми окрашены единичные кубики так, что каждый цвет имеют ровно 4 кубика.

Докажите, что можно выбрать n единичных кубиков различных цветов, никакие два из которых не лежат в одном слое.

3. Пусть $p\geqslant 5$ — простое число. Докажите, что

а) p^3 делит $C_{2p}^{p}-2$;

б) p^3 делит $C_{kp}^{p}-k$ для произвольного натурального числа k.

4. Пусть $f(x)$ — многочлен степени n с вещественными коэффициентами, имеющий n вещественных корней (не обязательно различных). Докажите, что для любого x выполнено неравенство

$$f(x)f''(x)\leqslant(f'(x))^2,$$

где $f'(x)$ и $f''(x)$ — первая и вторая производные этого многочлена.

5. В единичном круге с центром в точке O взят центральный угол, измеряемый дугой $AB=\alpha<90°$ (A и B — точки на окружности). Пусть H — основание перпендикуляра, опущенного из точки A на OB, точка T лежит на дуге AB и l — касательная к окружности в точке T. Прямая l отсекает от угла AHB прямоугольный треугольник Δ.

а) Докажите, что площадь треугольника Δ минимальна в том случае, если T — середина гипотенузы.

б) Докажите, что если S_α — минимальная площадь треугольника Δ, то функция S_α/α ограничена при $\alpha\to 0$, $\alpha\neq 0$, и найдите эту границу.

6. Шахматная доска размером $n\times n$ ($n\geqslant 2$) заполнена белыми и черными шашками по следующему правилу. Сначала поставили черную шашку на произвольное поле. Всяким следующим ходом ставится белая шашка на свободное поле, причем если уже есть соседние с ним поля (т. е. поля, имеющие с ним общую сторону), занятые шашками, то шашки на этих полях заменяются на шашки другого цвета. Это продолжается до тех пор, пока вся доска не будет заполнена. Докажите, что по крайней мере одна шашка в конечной ситуации — черная.

И. Табов

XV Московская экономико-математическая олимпиада

Предлагаем вам задачи XV Московской экономико-математической олимпиады для школьников 9—11 классов, проведенной в марте 1992 года на экономическом факультете МГУ. Ее подготовили и провели сотрудники, аспиранты и студенты кафедры математических методов анализа экономики.

В каждом из двух туров олимпиады участникам предлагались 4—5 задач, большинство из которых требовали не только математических знаний, но и некоторого представления об экономике. При подведении итогов призами были отмечены как абсолютные лидеры, так и «лучший экономист среди математиков» и «лучший математик среди экономистов».

Если вас интересует наука на стыке экономики и математики, вы можете обратиться в вечернюю экономико-математическую школу, существующую при экономическом факультете МГУ с 1968 года.

Традиционно в третье воскресенье сентября в 10 часов в ЭМШ проходит собеседование (по адресу: Москва, Ленинские горы, ул. Лебедева, 2 учебный корпус, ЭМШ).

1. Лимония — весьма патриархальная страна. В ней каждый мужчина либо торгует лимонами, либо выращивает их. В каждой семье по четыре сына. Двое из сыновей торговца и один сын крестьянина становятся торговцами, остальные — крестьянами. В незапамятные времена, при царе Лимоне, все были крестьянами. Каков процент крестьян в современной Лимонии?

2. В продовольственный магазин зашла свинья весом 50 кг. В магазине скопился излишек колбасы, которая на 20 % состоит из свинины и на 80 % из картона, и было решено употребить его на откорм свиньи. Через некоторое время свинья весила уже 250 кг, привес составил 1 : 1. Ее отправили на мясокомбинат и пустили на колбасу, причем выход мяса составил 75 %. Если предположить, что в магазин снова зайдет свинья с тем же первоначальным весом и ее будут откармливать полученной из первой свиньи колбасой до веса 250 кг, то каков будет «коэффициент картонности» этой свиньи?

3. В стране с расстроенным денежным обращением (объем денежной массы в обороте многократно превышает необходимый, вызывая дефицит и высокую инфляцию) решили провести финансовую реформу с целью максимально сократить денежную массу. Население страны разделено на два класса — тощих и толстых, причем толстых в семь раз меньше, чем тощих, но суммы богатств в руках тех и других равны. Богатство толстых состоит на 60 % из акций и на 40 % из денежных средств, 20 % которых — наличность, а остальное — сбережения на счетах в банке. Богатство тонких: акции — 20 %, денежные средства — 80 %, из них наличные составляют 80 %, остальное — на счетах в банке. Существует угроза социалистической революции или военного переворота. Они произойдут, если

1) по итогам реформы разница между величинами среднего богатства каждого класса увеличится более чем в два раза или сократится более чем в три раза;

2) потеря богатства какого-либо класса будет больше 3/4 его первоначальной величины;

3) при проведении реформы дифференциация потерь между классами будет больше, чем в три раза;

4) реформа не произойдет.

Опишите оптимальный, на ваш взгляд, механизм проведения реформы.

4. На какую цифру оканчивается число $1992^{1993^{1994}}$?

5. В санатории каждый отдыхающий играет хотя бы в одну карточную игру: покер, бридж или преферанс. Всего же в санатории отдыхает 42 человека.

Среди тех, кто играет не более чем в две игры, на каждого играющего исключительно в преферанс приходится трое чередующих преферанс с бриджем, а на каждых пятерых игроков в бридж и преферанс приходится два игрока в покер и преферанс. Следует также учесть, что ровно в одну игру играет 12 отдыхающих, а количество людей, играющих только в преферанс, ровно вдвое меньше числа людей, не играющих в него вовсе.

Какой процент отдыхающих играет во все три игры? Если это определить невозможно, объясните, почему.

6. Дано: $101-102=1$. Передвинув одну цифру (0, 1 или 2), превратите это высказывание в верное равенство.

7. Беспризорник умеет из 3-х окурков делать одну папиросу. В одной из урн он отыскал 12 окурков. Сколько папирос ему удалось выкурить?

8. Саша, Петя и Миша играют в такую игру. Саша задумал два натуральных числа и сообщил Пете их произведение, а Мише сумму и спросил: «Петя, ты знаешь, какие числа я задумал?» — «Нет.» — «А ты, Миша?» — «Тоже нет». Затем Саша повторил свой вопрос, и сначала Петя, а потом и Миша отгадали эти числа. Какие числа были задуманы?

9. Король Надувании Туфтий I приказал провести перепись населения и определить, изменились ли к лучшему показатели жизни подданных Надувании за годы его правления. Сравнивая результаты проведенной переписи с результатами предыдущей, надуванское статистическое управление отметило, что в стране выросли как средняя продолжительность жизни мужчин, так и средняя продолжительность жизни женщин. В то же время группа независимых экспертов представила доклад, свидетельствующий о снижении средней продолжительности жизни в целом среди подданных короля.

Какой информации следует верить королю?

10. Колхоз «Тимуровец» выделил Академии наук квадратный участок земли, на котором надо разместить пять квадратных садовых участков равной площади для пяти академиков. Помогите управляющему делами Академии сделать это с наименьшими потерями площади.

О неутомимой лягушке

Библиотечка фантастики «Кванта»

Ф. ДИК

— Зенон был первым великим ученым,— изрек профессор Харди, окидывая аудиторию суровым взглядом.— Возьмите, например, его парадокс с колодцем и лягушкой. Как показал Зенон, лягушка никогда не достигнет верхнего края колодца, если длина каждого ее нового прыжка составляет половину длины предыдущего: всегда будет оставаться малое, но вполне реальное расстояние до конца пути.

Пока студенты, пришедшие слушать лекцию по физике, осмысливали сказанное профессором, в аудитории царила тишина. Затем из задних рядов медленно поднялась рука, и Харди недоверчиво взглянул на ее обладателя.

— Ну?— сказал он.— Что еще, Питнер?

— На занятиях по логике нас учили, что лягушка достигнет верхнего края колодца. Профессор Гроут сказал...

— Не достигнет!

— А профессор Гроут сказал, что достигнет.

Харди сложил руки на груди.

— На моих занятиях лягушка никогда не достигнет верхнего края колодца. Я сам изучил эту проблему, и я убежден, что до края всегда будет оставаться маленький отрезок пути. Например, если она прыгнет...

Зазвенел звонок.

Студенты дружно поднялись со своих мест и направились к выходу. Так и не договорив, профессор Харди нахмурился и, недовольно потирая рукой подбородок, уставился вслед шумной орде молодых мужчин и женщин с ясными пустыми лицами. Когда последний студент покинул аудиторию, Харди достал трубку и вышел в коридор. Он взглянул сначала в одну сторону, потом в другую: ну так и есть — совсем неподалеку стоял профессор Гроут и пил воду из фонтанчика, утирая подбородок.

— Гроут,— произнес Харди.— Пойдите сюда!

Моргая, профессор Гроут оторвался от фонтанчика.

— Что случилось?

— Идите сюда,— сказал Харди и направился к нему сам.— Как вы смеете трогать Зенона? Он был ученым, и как таковой является принадлежностью моего курса обучения, а никак не вашего. Оставьте Зенона в покое!

— Зенон был философом!— Гроут возмущенно уставился на Харди.— Впрочем, я знаю, что у вас на уме. Это парадокс с лягушкой и колодцем. К вашему сведению, Харди, лягушка с легкостью выберется из колодца. Вы дезинформируете своих студентов. На моей стороне логика!

— Ха, логика!— Харди фыркнул, сверкая глазами.— Старые пыльные максимы! Совершенно очевидно, что лягушка должна остаться в колодце навсегда. Вечная пленница, которой никогда не суждено выбраться!

— Она выберется!

— Не выберется!

— Джентльмены, вы закончили? — раздался рядом спокойный голос, и они резко обернулись: позади с мягкой улыбкой на губах стоял декан факультета.— Если да, то не согласитесь ли вы заглянуть ко мне в кабинет? — Он кивнул в сторону своей двери.— Это ненадолго.

Гроут и Харди переглянулись.

— Видите, что вы наделали? — прошипел Харди, входя в кабинет декана.— Снова из-за вас неприятности.

— Из-за вас. И из-за вашей лягушки!

— Садитесь, джентльмены.— Декан указал на два стула с жесткими спинками.— Садитесь поудобнее. Мне, право, жаль беспокоить вас, когда вы так заняты, но мне действительно необходимо с вами поговорить.— Некоторое время он смотрел на них задумчиво, потом спросил: — Могу я поинтересоваться, что послужило причиной вашего спора сегодня?

— Зенон,— пробормотал Гроут.

— Зенон?

— Парадокс с лягушкой и колодцем.

— Понятно,— декан кивнул.— Понятно. Лягушка и колодец. Парадокс, которому две тысячи лет. Древняя загадка. И вы, двое взрослых мужчин, стоите в коридоре и спорите, как...

— Проблема заключается в том,— сказал Харди,— что никто никогда не проводил экспериментальной проверки. Парадокс носит совершенно абстрактный характер.

— Тогда вы двое и будете первыми, кто посадит лягушку в колодец и проследит, что из этого получится на самом деле.

— Но лягушка не станет прыгать в соответствии с условиями парадокса.

— Вы должны ее заставить, вот и все. Я даю вам две недели на то, чтобы подготовить эксперимент и определить истинный ответ на эту детскую загадку. Мне надоели бесконечные споры, и я хочу, чтобы вы так или иначе покончили с этой проблемой раз и навсегда.

Харди и Гроут молчали.

— Что ж,— произнес наконец Харди,— давайте займемся делом, Гроут.

— Нам понадобится сачок,— сказал Гроут.

— Сачок и стеклянная банка,— добавил Харди, вздыхая.— И, видимо, чем скорее мы приступим, тем лучше.

Работа над проектом «Лягушачья камера», как его вскоре окрестили, началась с размахом. Университет выделил двум ученым подвальное помещение, и Гроут с Харди сразу же принялись перетаскивать туда оборудование. Очень скоро в университете не осталось никого, кто не знал бы о проекте. Большинство специалистов по точным наукам оказались на стороне Харди: они даже сформировали клуб «Провал» и всячески принижали способности лягушек. На философском и искусствоведческом факультетах кто-то в ответ попытался организовать клуб сторонников успеха, но эта деятельность так ничем и не кончилась.

Гроут и Харди продолжали лихорадочно работать над проектом. По мере того, как двухнедельный срок приближался к концу, они пропускали все больше и больше лекций. А «Камера» тем временем росла и все больше и больше становилась похожей на длинную секцию канализационной трубы, расположившейся вдоль стены подвального помещения. Один конец ее исчезал в нагромождении проводов и аппаратуры; с другого конца крепилась дверь.

Как-то утром Гроут спустился в подвал и обнаружил, что Харди уже там: он стоял, заглядывая в трубу.

— Послушайте, Харди,— сказал Гроут,— мы ведь договорились не трогать установку, если кто-то из нас отсутствует.

— Я просто посмотрел внутрь. Там темно,— Харди ухмыльнулся.— Надеюсь, лягушка сможет разглядеть дорогу.

— В конце концов двигаться там можно только в одну сторону.

— А не запустить ли нам пробную лягушку?— предложил Харди, зажигая трубку.— Страшно хочется узнать, чем все кончится.

— Слишком рано,— сказал Гроут, с беспокойством наблюдая, как Харди ищет банку с лягушкой.— Может быть, стоит немного подождать?

— Испугались правды? Лучше помогите мне найти банку.

Тут у входа в подвал что-то скрипнуло, и они оба посмотрели на дверь. На пороге стоял студент Питнер и с любопытством оглядывал «Лягушачью камеру».

— Что вам надо?— спросил Харди.— Мы очень заняты.

— Вы хотите начать опыт? — Питнер проскользнул в помещение.— А для чего все эти катушки и реле?

— Все очень просто,— ответил Гроут, просияв.— Это я сам предложил. Вот здесь...

— Давайте лучше я объясню,— перебил Гроута Харди.— Вы его только запутаете. Мы в самом деле собирались начать эксперимент с первой пробной лягушкой. Если хотите, молодой человек, можете остаться.— Он открыл банку и достал оттуда мокрую лягушку.— Как видите, у трубы есть вход и выход. Лягушку мы сажаем со стороны входа. Можете заглянуть внутрь, молодой человек.

Питнер сунул голову в трубу и увидел длинный темный тоннель.

— А что там за линии?

— Это линии для замеров. Гроут, включайте.

Аппаратура ожила и мягко загудела. Харди посадил лягушку в трубу и захлопнул дверцу.

— Это чтобы она не выбралась с этой стороны.

— А зачем вам труба такого диаметра? — спросил Питнер. — Туда вполне поместится взрослый человек.

— Смотрите, — сказал Харди, включая газовый рожок. — Этот конец нагревается, и тепло должно гнать лягушку вдоль трубы. Мы будем наблюдать за ней через окошко.

Заглянув в трубу, они увидели, что лягушка преспокойно сидит на месте, поджав лапки и глядя вперед печальными глазами.

— Прыгай, глупая, — сказал Харди и прибавил газа в горелке.

— Не так сильно! — закричал Гроут. — Маньяк. Вы что, хотите ее изжарить?

— Смотрите! — воскликнул Питнер. — Прыгает!

Лягушка действительно прыгнула.

— Благодаря теплопроводности металла дно трубы нагревается все дальше и дальше, — пояснил Харди, — и лягушке приходится прыгать, чтобы не обжечь лапы. Вот смотрите.

— Боже, профессор, — испуганно заговорил Питнер, — она уменьшилась. Лягушка стала в два раза меньше.

— Здесь-то и кроется чудо, — просиял Харди. — Дело в том, что в дальнем конце трубы располагается генератор особого силового поля, а нагрев вынуждает лягушку прыгать к генератору. Силовое поле действует на живые ткани таким образом, что по мере приближения к источнику они сокращаются в размере: чем дальше лягушка прыгает, тем меньше она становится.

— А зачем?

— Это единственный способ гарантировать, что каждый последующий прыжок лягушки будет меньше предыдущего. Прыгая, она становится меньше, и, соответственно, короче становятся ее прыжки. Мы настроили аппаратуру таким образом, чтобы степень уменьшения соответствовала требованиям парадокса Зенона.

— И чем же все кончится?

— Вот это, — сказал Харди, — мы и намерены узнать. В дальнем конце трубы стоит фотоблокировочное устройство. Если лягушка доберется туда, она пересечет луч света, падающий на фотоэлемент, и таким образом отключит силовое поле.

— Доберется, — пробормотал Гроут.

— Нет. Она будет становиться все меньше и меньше, а прыжки ее короче и короче. Для нее труба будет удлиняться до бесконечности, и она никогда не доберется до конца.

Ученые обожгли друг друга убийственными взглядами.

— Вы слишком в себе уверены, — сказал Гроут.

Они склонились над окошком в трубе. Лягушка проскакала уже довольно большое расстояние, но увидеть ее стало очень трудно: маленькое пятнышко размерами не больше мухи продолжало ползти по дну трубы, становясь все меньше и меньше. Вскоре лягушка превратилась в крохотную точку, а потом и вовсе исчезла.

— Боже, — произнес Питнер.

— Мы вас больше не задерживаем, Питнер, — сказал Харди, потирая руки. — Нам с профессором Гроутом надо кое-что обсудить.

— Итак, — сказал Гроут, когда Питнер вышел, — трубу проектировали вы. Что стало с лягушкой?

— Как что? Она все еще прыгает где-то там среди атомов.

— Я подозреваю, что вы смошенничали. Наверняка по дороге с ней что-нибудь случилось.

— Если вы так считаете, — парировал Харди, — вы можете обследовать трубу сами.

— Пожалуй, я это и сделаю. Возможно, я найду там... какую-нибудь ловушку.

— Как хотите, — сказал Харди, ухмыляясь, выключил газ и открыл металлическую дверцу.

— Дайте мне фонарь, — потребовал Гроут.

Харди вручил ему фонарь, и Гроут, кряхтя, полез в трубу.

— Только без фокусов! — донесся оттуда его голос, отдающийся гулким эхом.

Харди подождал, пока Гроут скроется в трубе, потом наклонился и заглянул внутрь.

Профессор Гроут, чихая, с трудом добрался до середины трубы и остановился.

— В чем дело? — спросил Харди.

— Тут слишком тесно...

— Да? — улыбка Харди стала шире. Он вынул трубку изо рта и положил ее на стол.— Здесь я в состоянии вам помочь...

С этими словами он захлопнул дверцу, бросился к противоположному концу трубы и включил силовое поле. Загорелись лампы, защелкали переключатели.

— Ну вот, уважаемая лягушка, теперь прыгайте,— произнес Харди, сложив руки на груди.— Прыгайте, сколько захочется.

Он подошел к газовому рожку и зажег горелку.

В трубе было темно. Какое-то время Гроут лежал без движения, прислушиваясь к собственным медленно плывущим мыслям. Что случилось вдруг с Харди? Что он задумал?.. Потом Гроут все-таки поднялся на локтях и тут же ударился головой о потолок трубы. Становилось жарко.

— Харди! — громкий, панический крик загрохотал в трубе, отражаясь эхом от стен.— Откройте дверь! Что происходит?

Он попытался развернуться, чтобы пробраться к дверце, но не смог. Ничего не оставалось кроме как двигаться вперед, и Гроут пополз дальше, бормоча сквозь зубы:

— Ну вы у меня дождетесь, Харди, с вашими шуточками. Вы думаете...

Совершенно неожиданно труба подпрыгнула. Гроут упал, ударившись подбородком о металлическую поверхность, и заморгал. Труба определенно выросла, и теперь места стало более чем достаточно. А одежда!.. Брюки и рубашка болтались на нем, словно упавшая палатка.

— О, господи,— тихо проговорил он, встал на колени, развернулся с трудом и пополз обратно к двери. Толкнул ее, но дверь не поддалась.

Довольно долго он просто сидел, но, когда металлический пол под ним нагрелся, Гроут неохотно отполз вдоль по трубе в более прохладное место и, обхватив руками колени, мрачно уставился в темноту впереди.

— Что же мне делать?— спросил он сам себя вслух.

Через некоторое время к нему вернулось присутствие духа.

— Я должен рассуждать логически. Однажды я уже попал в силовое поле и стал теперь в два раза меньше. Следовательно, ростом я уже всего фута в три. Соответственно, труба стала для меня как бы вдвое длиннее.

Гроут достал из огромного теперь кармана фонарик, листок бумаги и принялся за вычисления. Фонарик, тоже ставший в два раза больше, он держал с трудом. Вскоре пол под ним снова нагрелся, и он, не задумываясь, подвинулся в сторону.

— Если я останусь здесь достаточно долго,— пробормотал он,— то я...

Труба снова подпрыгнула, отодвигаясь сразу во всех направлениях, и Гроут очутился под грудой грубой ткани. Задыхаясь, он наконец высвободился и, оглядываясь вокруг, произнес:

— Полтора фута. Что же будет дальше?

Но когда пол под ним снова стал горячим, он все-таки отполз еще.

— Три четверти фута.— На лице его выступил пот.— Всего три четверти.

Он бросил взгляд вдоль трубы. Далеко-далеко мерцал пересекающий трубу луч света фотоблокирующего устройства. Если бы добраться до него, если бы только добраться...

Поразмыслив над своими выкладками еще немного, Гроут пробормотал:

— Надеюсь, я не ошибся. Судя по вычислениям, я доберусь до светового луча примерно через девять с половиной часов, если буду двигаться без остановки.

Тяжело вздохнув, он встал, положил фонарик на плечо и добавил:

— Однако к тому времени я здорово уменьшусь.

Потом зашагал с гордо поднятой головой.

Профессор Харди повернулся к Питнеру.

— Расскажите аудитории, что вы видели сегодня утром.

Все посмотрели на Питнера, и тот нервно сглотнул.

— Э-э-э... Я заглянул в подвал, и меня пригласили осмотреть «Лягушачью камеру». Профессор Гроут пригласил. Они собирались начать эксперимент.

— Какой эксперимент?

— Эксперимент, связанный с парадоксом Зенона,— нервничая, пояснил Питнер.— С лягушкой. Ее посадили в трубу и закрыли дверцу. Затем профессор Гроут включил аппаратуру.

— И что произошло?

— Лягушка начала прыгать. И уменьшилась.

— Правильно, уменьшилась. А потом?

— Потом она исчезла.

Профессор Харди откинулся на спинку кресла.

— И лягушка не достигла противоположного конца трубы?

— Нет.

— Что и требовалось доказать.

Аудитория забормотала.

— Как видите, лягушка вопреки ожиданиям моего коллеги профессора Гроута не достигла конца трубы. И никогда не достигнет. Увы, мы больше не увидим это несчастное существо.

Аудитория заволновалась, и Харди постучал по крышке стола карандашом, потом зажег трубку и, снова откинувшись в кресле, выпустил в потолок облако дыма.

— Боюсь, этот эксперимент явился слишком тяжелым ударом для бедняги Гроута. Как вы, наверно, заметили, он не пришел после обеда на занятия. Насколько я понял, профессор Гроут решил отправиться в длительный отпуск в горы. Может быть, после того, как он немного отдохнет, придет в себя и забудет...

Гроут морщился, но продолжал идти.

— Не волноваться,— уговаривал он себя.— Главное продолжать двигаться вперед.

Труба снова подпрыгнула, и он покачнулся. Фонарик упал на пол и погас. Гроут остался в огромной темной пещере, у которой казалось, нет ни конца, ни края.

Но он продолжал идти.

Через какое-то время его одолела усталость.

— Отдых мне не повредит.— Он сел на грубый неровный пол.— Но, судя по новым вычислениям, мне потребуется около двух дней, чтобы дойти до конца трубы. Может быть, даже больше...

Гроут немного подремал, потом двинулся дальше. Внезапные увеличения трубы в размерах перестали его пугать: привык. Рано или поздно он доберется до конца и пересечет световой луч. Силовое поле выключится, и он снова обретет свои нормальные размеры... Гроут улыбнулся: то-то Харди будет удивлен.

Он ударился обо что-то большим пальцем ноги и упал. Страх охватил его, он задрожал и встал, озираясь в окружающей темноте.

В какую сторону теперь идти?

— О, господи,— пробормотал он, наклоняясь и трогая пол. Куда же ему теперь идти? Время тянулось. Он двинулся медленно сначала в одну сторону, затем в другую, не различая ничего вокруг, совсем ничего. Потом побежал, бросаясь в темноте то туда, то сюда, спотыкаясь и падая. И вдруг покачнулся — то самое знакомое ощущение. Гроут облегченно вздохнул: значит, он движется в нужном направлении! И он снова побежал, но теперь уже успокоившись и ровно, глубоко дыша открытым ртом. Затем мир снова покачнулся, когда Гроут стал еще чуть меньше, но направление оставалось верным. Он продолжал бежать.

И по мере того, как он бежал и бежал, пол становился все грубее и грубее. Вскоре пришлось перебираться через какие-то камни, и Гроут остановился. Разве трубу не полировали? Сначала шкуркой, потом...

Ну конечно же,— пробормотал он.— Даже поверхность лезвия для бритья может показаться грубой, если ты сам так мал...

Он продолжал двигаться вперед, ощупывая руками преграды. Вскоре огромные камни вокруг и даже его собственное тело начали слабо светиться. Что это?.. Гроут взглянул на свои руки: ладони поблескивали в полумраке.

— Тепловое излучение, конечно же. Спасибо, Харди.

Прыгая с камня на камень, Гроут двигался в сумеречном свете по бесконечной равнине, усеянной булыжниками и валунами, перескакивая через расселины, как горный козел. «Или как лягушка»,— подумалось ему, когда он перепрыгнул через очередную яму и остановился перевести дух. Как долго еще осталось? Он оглядел высящиеся вокруг обломки железной руды, и внезапно его снова охватил страх.

— Может быть, об этом лучше даже не думать,— сказал он, взобравшись на скалу, и прыгнул через трещину. Следующая пропасть оказалась еще шире, и он едва удерживался на краю, задыхаясь от напряжения и цепляясь руками за неровные уступы.

Он прыгал и прыгал без конца, снова и снова. Он забыл уже, сколько раз ему приходилось это делать.

Стоя на краю скалы, он решился на еще один прыжок и... Падал он долго, все глубже и глубже в пропасть, все ближе к неясному свечению. Но дна пропасти все не было и не было. Он падал и падал.

Профессор Гроут закрыл глаза, его охватил покой, усталые мышцы отдыхали.

— Все. Никаких больше прыжков,— произнес он, опускаясь все ниже и ниже.— Закон природы... Чем меньше тело в размерах, тем меньше проявляется действие силы тяжести... Не удивительно, что насекомые падают так безболезненно...

Не открывая глаз, он отдался во власть темноты.

И таким образом,— сказал профессор Харди,— мы вполне можем ожидать, что этот эксперимент войдет в историю науки как...

Он замолчал и нахмурился, потому что вся аудитория смотрела не на него, а в сторону двери. Кое-кто из студентов улыбался, потом один из них рассмеялся. Харди повернулся посмотреть, в чем дело.

— Это что еще такое?.. — вырвалось у него.

От двери прыгала по полу лягушка.

— Профессор,— возбужденно сказал Питнер, поднимаясь со своего места,— это подтверждает выработанную мной теорию. Лягушка настолько уменьшилась в размерах, что провалилась между...

— Что?— возмутился Харди.— Это другая лягушка.

— ...между атомами кристаллической решетки материала, из которого изготовлен пол «Лягушачьей камеры». Затем она мягко опустилась на пол, поскольку влияние силы тяжести сказывалось на ней гораздо меньше, и, покинув пределы силового поля, вновь обрела свои нормальные размеры.

Питнер, улыбаясь, поглядел на лягушку. Та продолжала медленно шлепать через комнату.

— То, что вы говорите...— начал профессор Харди, без сил опускаясь в кресло, но в этот момент прозвенел звонок, и студенты принялись собирать книги и тетради. Вскоре профессор Харди остался один. Он поглядел на лягушку, покачал головой и пробормотал:

— Этого не может быть. На свете полно лягушек. Это какая-то другая лягушка.

К его столу подошел студент.

— Профессор Харди...

Харди поднял голову.

— Да? Что случилось?

— Там в коридоре вас ждет какой-то человек, закутанный в одеяло. Он чем-то расстроен.

— Ладно,— сказал Харди, вздохнул и встал. У дверей он остановился, снова глубоко вздохнул, потом сжал губы и вышел в коридор.

За дверями, завернутый в красное шерстяное одеяло, его ждал Гроут. Лицо его горело от возбуждения. Харди посмотрел на него виноватым взглядом.

— Мы так и не выяснили!— закричал Гроут.

— Что?— пробормотал Харди.— Послушайте, э-э-э, Гроут...

— Мы так и не выяснили, доберется ли лягушка до конца трубы. Мы с ней провалились между атомами. Нам придется придумать какой-то другой метод проверки парадокса. «Камера» для этого не годится.

— Да, пожалуй,— произнес Харди.— Послушайте, Гроут...

— Об этом позже,— сказал Гроут.— Я найду вас сегодня вечером. А сейчас мне надо на лекцию.

И он, все еще удерживая одеяло руками, торопливо зашагал по коридору.

Перевод с английского А. Корженевского

Ответы, указания, решения

[redacted]чи старика Хоттабыча

1. В принципе, наручные солнечные часы изготовить можно. Но чтобы верно определять по ним время, их необходимо установить строго горизонтально и сориентировать по сторонам света. Для этого в часах должен быть уровень (или отвес) и магнитный компас. Во времена султанов обходились без компаса, определяя направление «север — юг» по звездам и Солнцу. Но это требовало многодневных наблюдений, после которых часы жестко закрепляли на земле или на стене здания и больше не трогали. Когда же в Европе восемь веков назад появился магнитный компас (о котором Хоттабыч знать не мог), то стали изготавливать и небольшие походные солнечные часы. Их можно увидеть, например, в Эрмитаже. Правда, были они не наручными, а карманными, но умещались иногда в коробке не больше спичечного.

2. Волька пожелал морской бинокль вовсе не потому, что собирался стать моряком. Бинокль нужен был ему для астрономических наблюдений. Морской же бинокль отличается от всех прочих тем, что имеет наибольший диаметр объектива, что позволяет увидеть слабые звезды. К тому же морские бинокли специально сконструированы для ночных наблюдений, поскольку ночь — наиболее опасный период для кораблевождения. Высокая светосила морских биноклей, дающая возможность наблюдать слабосветящиеся туманности, делает их вожделенными для всех любителей астрономии.

3. Пусть $R_З=6371$ км — радиус Земли, h — высота полета ковра-самолета, α — угол между направлениями на горизонт с поверхности Земли и с ковра-самолета (рис. 1). Тогда в прямоугольном треугольнике с гипотенузой $c=R_З+h$ и катетом $R_З$ второй катет $b=\sqrt{(R_З+h)^2-R_З^2}=\sqrt{2R_Зh+h^2}$. Если $h\ll R_З$, то угол α мал и, выраженный в радианах, составляет $\alpha\approx\sin\alpha=b/c\approx\sqrt{2h/R_З}$. Если теперь подставить численное значение $R_З$ и выразить α в градусах (1 радиан $=57{,}3^\circ$), то получим очень простую и удобную формулу:

$$\alpha\approx1^\circ\sqrt{h_{км}}\ ,$$

где $h_{км}$ — высота полета, выраженная в километрах. Поскольку 600—700 локтей соответствуют 300—350 м, линия горизонта для путешественников оказалась на $0{,}6^\circ$ ниже, чем для наземного наблюдателя. А видимый диаметр Солнца составляет $0{,}5^\circ$. Значит, оно могло быть видимым на высоте полета ковра-самолета. Хоттабыч правильно рассчитал высоту полета.

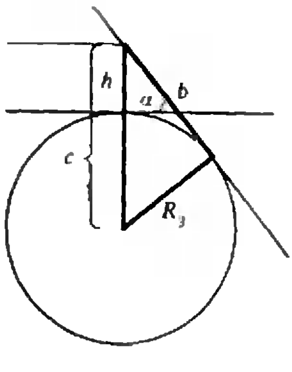


Рис. 1.

4. Воспользовавшись результатами предыдущей задачи, определим разницу в положении горизонта у наблюдателей, находящихся на высотах h_1 и h_2:

$$\alpha_1-\alpha_2=1^\circ(\sqrt{h_{км\,1}}-\sqrt{h_{км\,2}}).$$

Если $h_2=600-700$ локтей, а $h_1=h_2+500$ локтей, то $\alpha_1-\alpha_2\approx0{,}2^\circ$. Получается, что подъема на 500 локтей явно недостаточно, чтобы сделать видимым зашедший за горизонт солнечный диск. В действительности для этого пришлось бы подняться на 1300 локтей. Значит, Волька ошибся и не достоин звания «величайшей в мире балды».

Расстояние до горизонта — это длина катета b на рисунке 1 (см. предыдущую задачу). Для малых высот $b\approx\sqrt{2R_Зh}=113\text{ км}\sqrt{h_{км}}$. С высоты человеческого роста на ровной поверхности (степь, море) горизонт находится на расстоянии 5 км, а с высоты в 1000 локтей он удаляется до 80 км.

5. Очевидно, считая свой шаг длиннее Волькиного (хотя на самом деле они были равны), Омар Юсуф использовал пропорцию $v/11=1200/1400$ и вылетел со скоростью $v=9{,}4$ км/с.

6. Сложив по правилу параллелограмма две первые космические скорости (v_I), направленные под прямым углом друг к другу, получим вторую космическую скорость ($v_{II}=\sqrt{2}\,v_I$), направленную под углом 45° к вертикали. В результате Хоттабыч перешел на параболическую орбиту, которая, если не пересечет поверхность Земли, то уведет его от нашей планеты в космическую даль. Чтобы встреча с Землей состоялась, начальная круговая орбита должна быть достаточно низкой. Как показывают расчеты (выходящие за рамки школьной программы по физике), эта высота составляет 6571 км. Таким образом, однозначного ответа, вернется ли Хоттабыч при таком маневре на Землю, дать нельзя.

7. Все дело в том, что и звуку, и свету — как любому волновому движению — присуще явление дифракции, т. е. огибания волнами краев препятствий. Для света такие препятствия должны быть очень маленькими, поэтому в обычной жизни световые лучи отражаются по законам геометрической оптики и не «загибаются». А вот дифракция звуковых волн не дает нам возможности направить их в одну сторону. Кстати, приставленный ко рту рупор заметно уменьшает влияние дифракции. Даже Хоттабыч, несмотря на его волшебные способности, не пренебрег этим эффектом: подсказывая Вольке, он «прильнул к стенке и тру-

долюбиво забормотал, приставив ко рту ладонь трубкой», т. е. сделав из нее маленький рупор.

8. Покрытая жиром поверхность не смачивается водой, поэтому вода собирается на ней отдельными капельками, которые легко стряхнуть.

[redacted]пловые фантазии и прочие удовольствия»

1. В восходящих потоках теплый влажный воздух охлаждается, расширяясь по мере понижения атмосферного давления с высотой. Из-за понижения температуры водяной пар частично конденсируется, образуя облака, а воздух несколько согревается за счет скрытой теплоты испарения, высвобождаемой при конденсации. Поэтому все время происходит процесс образования новых облаков. Постарайтесь при случае понаблюдать, как возникают, изменяются и исчезают эти облака.

2. Для испарения воды требуется тепло. Чтобы молекула воды оторвалась от слоя воды, т. е. чтобы произошло испарение, молекуле необходимо сообщить энергию, которая позволила бы ей преодолеть притяжение других молекул воды. В то же время часть молекул пара будет случайным образом попадать в воду и отдавать ей избыток энергии. Если жидкость находится в равновесии со «своим» паром в закрытом сосуде, то на испарение затрачивается такое же количество энергии, какое поступает за счет конденсации. Однако при наличии ветра водяной пар непрерывно уносится, и водяной слой теряет энергию. Если такой водяной слой покрывает вашу кожу, то энергия для его испарения отбирается у вашего тела, и вы ощущаете прохладу. Метиловый спирт испаряется быстрее воды и скорее охлаждает кожу. Пористая холщовая сумка, в которой хранили воду, охлаждалась вследствие испарения воды с ее поверхности, которое особенно усиливалось, если сумку обдувал ветер.

3. Если процедура «окропления кипятком» начинается в тот момент, когда из котла только доносятся первые громкие звуки, то вода там еще не достигла температуры кипения и, хотя она очень горячая, она не опасна. Когда человек подбрасывает воду вверх, она разбивается на капли, которые успевают несколько охладиться, прежде чем попадут на кожу. Если, кроме того, участник представления потеет, что наверняка и происходит на самом деле, то пот также защищает его от горячих капель.

4. Когда капля попадает на раскаленную сковороду, ее нижняя часть мгновенно испаряется и образует паровую подушку между сковородой и оставшейся частью капли. Затем благодаря излучению тепла сквозь паровую подушку, конвекционным потокам внутри подушки и теплопроводности, капля нагревается. Однако, чтобы она нагрелась таким образом до кипения, потребуется 1—2 мин. В течение этого времени паровая подушка предохраняет каплю от испарения, и та беспрепятственно пляшет и скачет по поверхности сковороды.

5. Перегретая (температура выше температуры кипения) вода от раскаленных пород с глубины до 1000 м просачивается в полость гейзера и его главный ствол. Как только вода оказывается в полости, в ней образуются пузырьки пара, которые, увеличиваясь, поднимаются вверх. Когда через воду проходят пузырьки пара, она вскипает и часть ее под давлением образующегося пара выбрасывается вверх. Затем весь процесс повторяется, иногда, как в гейзере Верный служака, через строго определенные промежутки времени.

6. При слабом ветре или его отсутствии вы теряете тепло в основном путем теплового излучения. Любой предмет при температуре выше абсолютного нуля излучает тепло, и чем горячее предмет, тем больше тепла он излучает. Кроме того, он также поглощает тепло из окружающей среды, причем количество поглощенного тепла зависит от температуры среды. Поскольку температура вашего тела почти всегда выше температуры среды, тело в целом теряет тепло. Когда вы в холодный день находитесь на улице или стоите в комнате лицом к окну, поглощаемое вами излучение незначительно, поскольку окружающая среда излучает слабо. Поэтому потеря телом тепла увеличивается, и вам становится холодно. Астронавт, выходя в космическое пространство без скафандра, должен ощущать ужасный холод, так как космический вакуум не излучает тепла.

Люди приспосабливаются к продолжительному холоду с помощью соответствующего питания и усиления притока крови к поверхности тела. Жители Севера потребляют пищу с более высоким содержанием белков, чем большинство людей, живущих в более низких широтах. Это способствует более интенсивному обмену веществ в организме, что помогает противостоять холоду.

При охлаждении организма капилляры, по которым кровь поступает к коже, сокращаются, благодаря чему потеря тепла через кожу уменьшается. Когда температура конечностей человека становится слишком низкой, он начинает дрожать — усиление мышечной активности согревает руки и ноги.

Человек теряет тепло не только путем излучения, но и в результате теплопроводности (например, когда он стоит босиком на холодной земле), а также конвекции. Шуба согревает вас, так как заключенный между ворсинками меха воздух очень плохо проводит тепло. Чтобы свести потери тепла к минимуму, шубу — особенно в ветренный день — лучше надевать мехом внутрь, тогда ветер не будет выдувать из нее воздух, который и защитит вас от холода.

7. Ранним вечером, когда температура падает, дерево оказывается резервуаром более теплого воздуха, который в результате конвекции поднимается вверх. Насекомых привлекает тепло этого воздушного потока, а также, возможно, влага, которая образуется в нем, поскольку при подъеме воздух охлаждается и происходит конденсация пара.

8. Более высокая температура в центре города по сравнению с его окраинами и пригородами объясняется несколькими причинами: 1) в городе меньше испарение (а оно сопровождается поглощением значительного количества тепла);

2) мостовые и здания накапливают больше тепла, чем почва; 3) из-за большой высоты строений и их специфического расположения ветер в городе слабее. К менее существенным факторам следует отнести уборку снега зимой и выделение тепла различными механизмами (в том числе автомобилями).

9. Садовод расставляет дымящиеся жаровни в конце дня, когда земля уже прогрета солнцем. Создаваемый жаровнями дым поглощает излучаемое землей тепло и переизлучает его обратно на землю. Поэтому тепло сохраняется в пространстве между дымом и землей, и сад охлаждается не так сильно, как в том случае, когда излучаемое землей тепло беспрепятственно уходит в атмосферу. Подобный эффект создают и естественные облака.

10. Мыльные пузыри «наоборот», или антипузыри, как их иногда называют, исследованы очень мало. Под действием поверхностного натяжения вода внутри пузыря принимает форму шара, поверхностное натяжение также препятствует тому, чтобы вода из пузыря проходила сквозь воздушную прослойку наружу.

[redacted]оянный электрический ток

1. $\mathscr{E}_2/\mathscr{E}_1=(R_2+R_3)/R_3$.
2. $U_1=U_2=3/4\mathscr{E}$.
3. $\mathscr{E}=24$ В.
4. $k=(mn-1)/(m+n-2)$.
5. $F=\varepsilon_0\varepsilon\rho^2I^2/(2S)$.

[redacted] Московская [redacted]омико-математическая олимпиада

1. Крестьяне составляют 2/3 (около 67 %) населения Лимонии.
2. Картонность свиньи ≈74 %.
4. На 2. 6. $101-10^2=1$.
7. 6 папирос. В самом деле: беспризорник изготавливает 5 папирос, и у него остается еще 2 окурка. Он берет взаймы один окурок (у такого же бедолаги, например), делает шестую папиросу и, выкурив одну из полученных папирос, возвращает долг.
8. 1 и 4.
9. Одна информация не противоречит другой.
10. См. рис. 2.

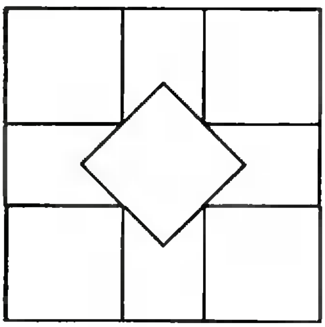


Рис. 2.

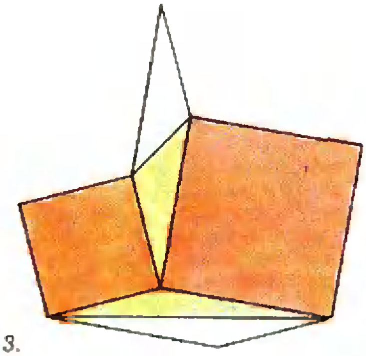


Рис. 3.

[redacted]нт» для младших школьников (см. «Квант» № 7)

1. Это числа 45, 495, 4545, 4995, 45495, 49545, 49995, ...
2. Из закона Архимеда следует, что давление деревянного цилиндра высотой 12 см равно давлению столба воды высотой 12—3=9 см, т. е. 9 г/см^2.
3. Рассмотрим пару соседних квадратов и дополним внешний и внутренний треугольники до параллелограммов (рис. 3). Нетрудно видеть, что полученные параллелограммы равны, а следовательно, равны и площади внутреннего и внешнего треугольника, поскольку они составляют по половине площади этих параллелограммов.
4. Сейчас туфли стоят 466 рублей 56 копеек. Полгода назад они стоили 156 рублей 25 копеек. Цена возрастает ежемесячно в 1,2 раза.
5. Если в первом кошельке лежит одна монета в 50 копеек и 48 монет по одной копейке, то эти деньги, очевидно, нельзя разделить на две равные части. Деньги из второго кошелька разделить на равные части всегда можно. Нарисуем окружность и разделим ее на 98 равных частей. Затем отметим красным цветом некоторые точки деления так, чтобы полученные отрезки соответствовали набору монет. Так как монет 50, то и точек будет поставлено 50, а 48 точек останутся черными. Нетрудно видеть, что найдутся две диаметрально противоположные красные точки. Эти точки определяют деление монет на две равные части.

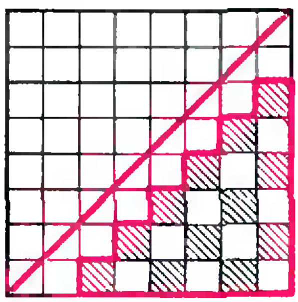


Рис. 4.

22. Ответ: 96420×87531. Максимальность этого числа следует из того, что произведение увеличивается, если сумма сомножителей увеличивается, а их разность уменьшается.

23. Количество костяшек домино, лежащих целиком ниже диагонали, равно 12, поскольку их количество равно количеству черных полей доски, отмеченных на рисунке 4.

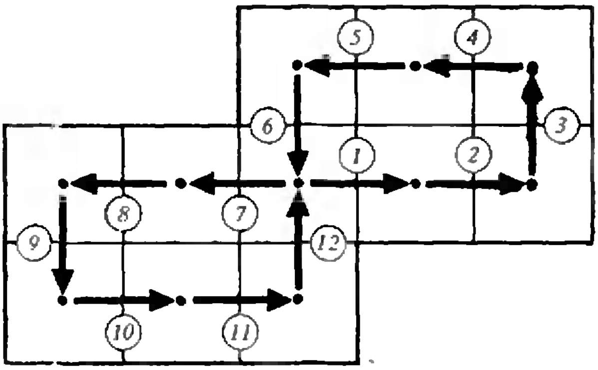


Рис. 5.

Эти костяшки покрывают 9 белых полей, лежащих внутри ступенчатой фигуры, и следовательно, 3 поля вне нее. Значит, остальные 4 белых поля между фигурой и диагональю покрываются костяшками, каждая из которых покрывает и диагональную клетку.

24. Требуемым образом перекатить кубик возможно, например, так, как изображено на рисунке 5.

Поправка

В № 5 за 1992 г. в условии задачи М1341 по вине типографии допущена опечатка. Числа, которые нужно сравнить, должны выглядеть так:

а) $\sqrt{m+\sqrt{n+\sqrt{m+\ldots}}}$

и $\sqrt{n+\sqrt{m+\sqrt{n+\ldots}}}$,

б) $\sqrt{m+\sqrt{n+\sqrt{n+\ldots+\sqrt{n}}}}$

и $\sqrt{n+\sqrt{m+\sqrt{m+\ldots+\sqrt{m}}}}$.

Срок отправки решений продлевается до 1 ноября 1992 г.
Приносим извинения нашим читателям.

Номер подготовили:
Л. Винюкова, А. Егоров, А. Казинин, Л. Кардасевич, С. Коновалов, А. Котова, А. Савин, В. Тихомирова, А. Черноуцан

Номер оформили:
Н. Кузьмина, Т. Макарова, Э. Назаров, Л. Тишков, А. Хоменко, П. Чернуский, О. Шмелев, В. Юдин

Редактор отдела художественного оформления
П. Чернуский

Художественный редактор Е. Потапенкова

Зав. редакцией С. Давыдова

Корректор В. Сорокина

103006, Москва, К-6, ул. 1-я Тверская-Ямская, 2/1, «Квант», тел. 250-33-54, факс 251-55-57

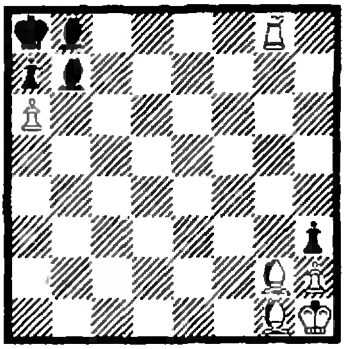
Сдано в набор 29.05.92. Подписано к печати 08.07.92.
Формат 70×100/16. Бумага офс. № 1.
Гарнитура школьная. Печать офсетная.
Усл. печ. л. 6,45. Усл. кр.-отт. 27,09. Уч.-изд. л. 7,11.
Тираж 80796 экз. Заказ 674. Цена 1 р. 10 к.

Ордена Трудового Красного Знамени
Чеховский полиграфический комбинат
Министерства печати и информации
Российской Федерации
142300, г. Чехов Московской обл.

Шахматная страничка

АЛГОРИТМ ОБРАТНОГО МАТА

В задачах на обратный мат белые начинают и вынуждают черных поставить мат белому королю в заданное число ходов. Задания в этом жанре шахматной композиции часто больше напоминают математическую задачу или головоломку, чем реальную шахматную игру. Для решения требуется найти некий алгоритм перемещения фигур, которое подчинено определенной логике. Начнем со следующего старинного примера — знаменитой задачи-головоломки.

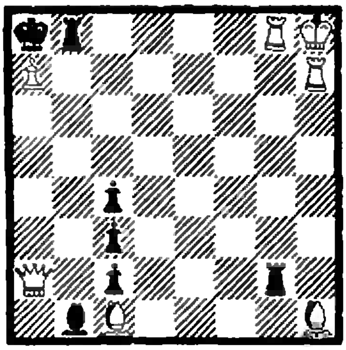


Г. Брейер, 1892

Обратный мат в 9 ходов

Краткое решение задачи таково: **1. Лf8! Сс6 2. Ле8! Cd5 3. Лd8! Се4 4. Лс8! Cf3 5. Лh8! Се4 6. Cf3 Cd5 7. Се4 Сс6 8. Cd5 Cb7 9. Сс6 С:с6×.**

Тонкие маневры ладей поначалу непонятны, и продемонстрировать полное решение без заминки можно, лишь зная алгоритм. Вот в чем его суть. Очевидно, в распоряжении ладьи есть только пять полей крайней горизонтали, с8—f8 и h8. При ладье на g8 и ходе черных следует С:g2+, и белым никогда не заставить черных дать мат. Но какие же именно поля этой горизонтали занимать ладье? Оказывается, все зависит от «зазора» между слонами. Если расстояние между ними четыре клетки, черные попадают в цугцванг при ладье на f8. Расстоянию в три клетки соответствует поле е8, в две клетки — d8, в одну — с8 и при соприкосновении слонов ладья должна стоять на h8. Теперь, когда алгоритм найден, решение «вычисляется» довольно легко. Если слон черных ходит иначе, то они вынуждены будут объявить мат еще быстрее. Кстати, белым легко «нарваться» на ложный след: 1. Лh8? Cf3! (зазор между слонами отсутствует) 1Ле8? Сс6! 1. Лd8? Cd5! 1. Лс8? Се4! Задача имеет массу подражаний, в том числе и с белым ферзем против ладьи. Любопытный поворот нашел автор следующей задачи, кстати, известный математик.



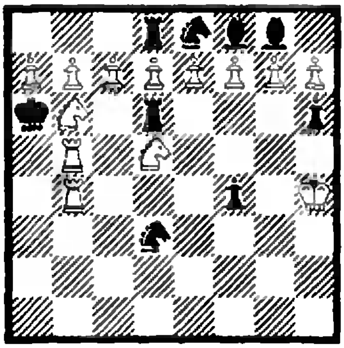
А. Хачатуров, 1985

Обратный мат в 10 ходов

Здесь друг другу противостоят ладьи, а темп белые выигрывают маневрами ферзя. **1. Фа3!! Лс8 2. Фа4! Лd8 3. Фа5! Лс8 4. Фа6 Лf8 5. Фа1! Ле8 6. Лf8 Лd8 7. Ле8 Лс8 8. Лd8 Лb8 9. Лс8 Са2 10. Ф:а2 Л:с8×.**

Легко убедиться, что и тут сохраняется указанный выше алгоритм. При расстоянии между ладьями в четыре клетки белый ферзь должен находиться на а3, в три клетки — на а4, в две — на а5, в одну — на а6. При соприкосновении ладей ферзь занимает поле а1. По аналогии с предыдущей задачей поле а2 контролируется черным слоном и недоступно ферзю. И в данном случае немало разветвлений, но правильный план находится по той же «формуле».

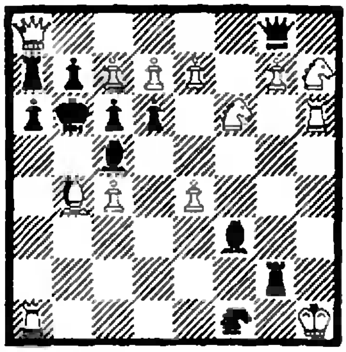
В одном из конкурсов в составлении задач на обратный мат было предложено следующее дополнительное требование: в решении белые пешки должны превратиться во все фигуры — ферзя, ладью, слона и коня (порядок значения не имеет). Вот задачи, занявшие в этом необычном конкурсе первые два места.



Т. Сабо, 1984

Обратный мат в 10 ходов

1. а8Ф+! Л:а8 2. bаЛ+! Крb7 3. с8С+! Крс6 4. d8К+! Л:d8, и теперь белые пешки превращаются в обратной последовательности: **5. edК+! Крd6 6. gfC+! Кре5 7. feЛ+! Се6 8. h8Ф+ Крf5 8. Ке3+ Крg6 10. Лg5+ hg×.**



Т. Сабо, 1984

Обратный мат в 6 ходов

1. Кd5+! cd 2. Са5+ Крс6 3. с8Ф+ Ф:с8 4. dсЛ+ Крd7 5. е8С+ Кре7 6. g8К+ Л:g8× — с превращением пешек последовательно в ферзя, ладью, слона и коня. Во втором варианте новые фигуры белых появляются в другом обратном порядке: **1...Ф:d5 2. с8К+ Крс7 3. d8С+ Крd7 4. Кf6+ Кре6 5. е8Л+ Крf7 6. g8Ф+ Л:g8×.**

Е. Гик

ЗАКОЛДОВАННАЯ ПЕТЛЯ

Старинную головоломку, показанную на нашем рисунке, часто можно увидеть в европейских магазинах игрушек, но ее нетрудно изготовить и самому. В головоломке требуется отцепить веревочную петлю от проволочных. На упаковке написано время, которое отведено на решение: 1 час — гениально, 5 часов — отлично, 3 дня — хорошо, 10 дней — удовлетворительно, 15 дней — отлично за упорство.

Мы надеемся, что любой, читавший в «Кванте» статьи о топологии, сможет решить головоломку менее, чем за 1 час. Топология, как известно, изучает свойства пространств, которые сохраняются при любых непрерывных преобразованиях. Применительно к данной игрушке это значит, что в процессе поиска решения ее части можно как угодно изгибать, растягивать или сжимать (разумеется, мысленно), но нельзя разрывать. Пример непрерывных преобразований показан внизу на упрощенном варианте головоломки. Он поможет вам разобраться в структуре замысловатых петель и сообразить, в какой последовательности нужно огибать проволочные петли веревочной.

1 р. 10 к. Индекс 70465